

ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1987




$\nu \sim 10^3 \tau_{cl}$
 $a_{cl} \sim 4\pi z^2 \cdot \Delta p / m$



$a \sim F_A / m^*$
 $\nu \sim 10^2 \tau_{cl}$

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

 Издательство «Наука».
Главная редакция физико-
математической литературы

В номере:

- 2 *Н. Б. Васильев.* Гексаграммы Паскаля и кубические кривые
9 *А. А. Варламов, А. И. Шапиро.* Пока чайник не закипел...
16 *Л. А. Островский.* Волны на воде
- Задачник «Кванта»**
23 Задачи М1056 — М1060, Ф1068 — Ф1072
25 Решения задач М1036 — М1040, Ф1048 — Ф1052
31 Маятник в магнитном поле и принцип суперпозиции
- Калейдоскоп «Кванта»**
32 «Квант» для младших школьников
37 Задачи
38 *Л. Г. Асламазов.* Лунный тормоз
- Школа в «Кванте»**
40 Математика 8, 9
44 Избранные школьные задачи
- Лаборатория «Кванта»**
45 *Б. М. Бубнов.* Вихри... на патефоне
- Искусство программирования**
48 *В. В. Гурарий, К. А. Стыркас.* Об одной рекуррентной последовательности
- Наш календарь**
51 Луиджи Гальвани (к 250-летию со дня рождения)
- Игры и головоломки**
53 *Л. А. Штейнгарц.* Из чего угодно — что угодно
- Практикум абитуриента**
55 *А. И. Буздин, С. С. Крогов.* Работа, энергия, тепло
- Информация**
54 Вечерняя физическая школа при МГУ
59 X Турнир юных физиков
- 61 **Ответы, указания, решения**
Смесь (36)
Шахматная страничка
Ретроспективный анализ (3-я с. обложки)

Наша обложка



На первой странице обложки — деталь расписного донца работы городецкого мастера *В. К. Лебедева* (начало XX века). Эта картинка, как и фотография на второй странице обложки, — иллюстрация к статье «Пока чайник не закипел...» (см. с. 9).

ГЕКСАГРАММЫ ПАСКАЛЯ И КУБИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ

В 1640 году Блез Паскаль (ему шел тогда семнадцатый год) обнаружил замечательное свойство шестизвенной замкнутой ломаной, вписанной в окружность. В возникающей конфигурации (рис. 1), которую Паскаль назвал «мистической гексаграммой», некоторые три точки пересечения неизбежно оказываются лежащими на одной прямой. Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Работа Паскаля и вышедшее четыре годами раньше небольшое сочинение Жерара Дезарга «Образец одного из общих способов для употребления перспективы» послужили фундаментом новой математической дисциплины — проективной геометрии. Именно тогда было осознано, что «древние знали не все» (выражение Пьера Ферма) — до тех пор достижения геометров Древней Греции считались непревзойденными.

С именем одного из последних античных геометров — Паппа Александрийского, жившего в III веке н. э., — связана теорема о шестизвенной ломаной, похожая на теорему Паскаля; с нее мы и начнем рассказ.

Очень советуем провести экспериментальную проверку этих теорем:

сделать несколько крупных и аккуратных чертежей — это не только убедит вас в справедливости теорем, но и позволит понять восторг, охвативший в свое время Паскаля и его современников (а быть может, и Паппа).

На геометрических доказательствах и многочисленных следствиях теорем Паппа и Паскаля мы не будем задерживаться, затронув лишь одну поучительную тему — использование геометрических преобразований, в том числе центрального проектирования. Наша главная цель — показать, что свойства «гексаграмм» — лишь частные проявления более общего факта, относящегося к алгебраической геометрии, одному из самых глубоких разделов математики XIX—XX веков. Мы увидим, что тот же факт объясняет и основное свойство операции «сложения точек» на кубической кривой (о его применениях в теории чисел рассказывалось в прошлом номере «Кванта»).

В заключительной серии рисунков точки трех цветов и соединяющие их прямые образуют конфигурации, где удивительные совпадения точек пересечения (которые в конфигурациях Паппа и Паскаля возникают

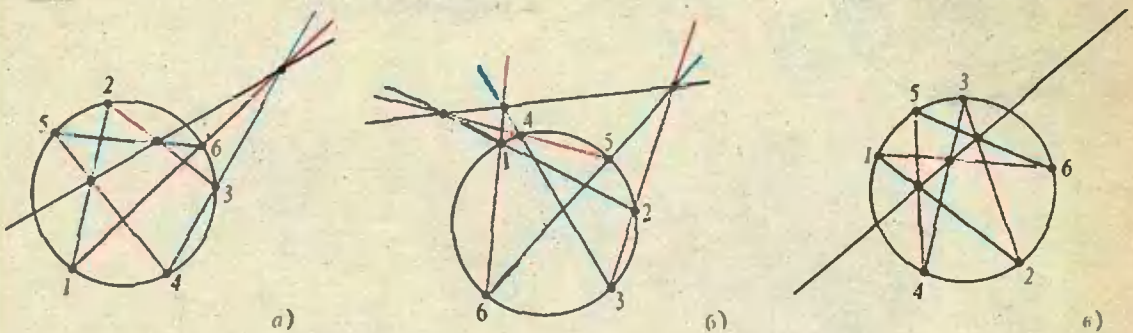


Рис. 1. Теорема Паскаля. Какие бы шесть точек ни взять на окружности и как ни занумеровать их числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 будут лежать на одной прямой (ее называют прямой Паскаля вписанного шестиугольника 123456). Другая формулировка: точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника или их продолжений лежат на одной прямой.

однажды) происходят бесконечное число раз.

Теоремы Паппа

Начнем со сравнительно простой теоремы о 6 точках, лежащих на двух прямых a и b (рис. 2а).

Теорема 1а. Пусть вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат попеременно на двух прямых. Если две пары противоположных звеньев этой ломаной (1-е и 4-е, 2-е и 5-е) параллельны, то и оставшаяся пара звеньев (3-е и 6-е) параллельна.

Идею доказательства поясним с помощью геометрически преобразований. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O (рис. 2б). Рассмотрим две гомотетии с центром O : одну — переводящую прямую A_1B_1 в A_3B_2 , и другую — переводящую A_3B_3 в A_2B_1 . Их композиция — результат последовательного выполнения этих гомотетий — переводит прямую A_1B_3 в A_2B_2 , поэтому $A_1B_3 \parallel A_2B_2$. Заметим, что следить за преобразованиями точки A_1 удобно, применяя гомотетии в одном порядке: $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$, а точки B_3 — в другом: $B_3 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2$. Результат, конечно, не зависит от порядка применения двух гомотетий: их композиция — это тоже гомотетия с центром O , коэффициент которой равен произведению коэффициентов этих двух гомотетий. В случае, когда прямые a и b параллельны (рис. 2в), в том же рассуждении гомотетии нужно заменить параллельными переносами.

Таким образом, теорема 1а — это просто геометрическое выражение

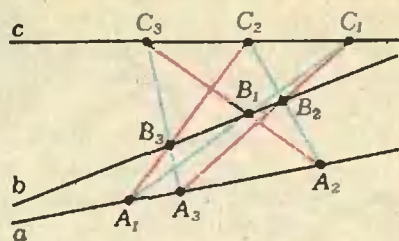


Рис. 3. Конфигурация Паппа из 9 точек и 9 прямых. Какие бы тройки точек A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 на прямых a и b ни взяли, точки C_1, C_2, C_3 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , A_2B_2 и A_3B_3 , A_3B_3 и A_1B_1 будут лежать на одной прямой (теорема 1).

коммутативности умножения (и сложения) чисел; это объясняет важную роль теоремы Паппа в основаниях геометрии (см., например, книгу [5]).

Теорема Паппа о 6 точках — лишь очень специальный случай значительно более глубокой теоремы (также носящей его имя) о конфигурации, состоящей из 9 точек и 9 прямых (рис. 3).

Теорема 1. Пусть три голубые прямые пересекают три красные в девяти черных точках. Если две тройки черных точек лежат на двух прямых (отличных от красных и голубых), то и оставшаяся тройка черных точек лежит на прямой.

Конфигурация Паппа замечательна тем, что все три тройки прямых — голубых, красных и черных — участвуют в ней совершенно равноправно: в каждой из 9 точек пересекаются три прямые разных цветов.

Начав строить такую конфигурацию, мы обнаружим, что при неудачном выборе первых шести точек A_1 ,

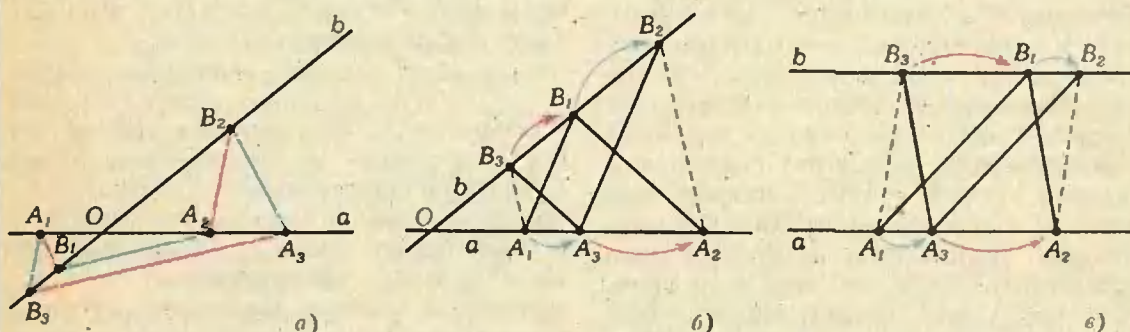


Рис. 2. Гексаграммы Паппа. Шесть вершин ломаной $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ лежат попеременно на двух прямых a и b : первые четыре выбираются произвольно, затем A_3 и B_3 строятся так, что $B_2A_3 \parallel A_1B_1$, $A_3B_3 \parallel B_1A_2$; тогда обязательно $B_3A_1 \parallel A_2B_2$ (теорема 1а). Доказательство: а), б) перемножив равенства $OA_1/OA_3 = OB_1/OB_2$ и $OA_3/OA_2 = OB_3/OB_1$, получим $OA_1/OA_2 = OB_3/OB_1$; в) сложив равенства $A_1A_3 = B_1B_2$ и $A_3A_2 = B_3B_1$, получим $A_1A_2 = B_3B_2$.

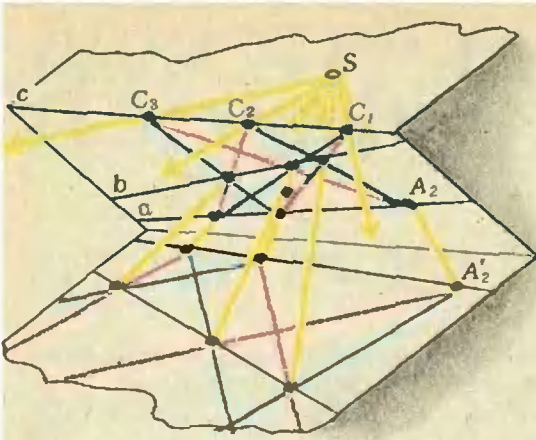


Рис. 4. Сведение общей теоремы Паппа к специальному случаю (теореме 1а). Нарисуем конфигурацию Паппа на стекле или прозрачной бумаге, расположим ее в наклонной плоскости так, чтобы прямая C_1C_2 была горизонтальной, и спроектируем на горизонтальную плоскость с помощью источника света S — центра проекций. — расположенного над плоскостью на той же высоте, что и прямая C_1C_2 . В проекции получится гексаграмма Паппа: пары разноцветных прямых, пересекающихся в точках C_1, C_2 и C_3 , проектируются в пары параллельных прямых, поэтому C_3 лежит на прямой C_1C_2 .

B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 новые точки C_1, C_2, C_3 могут оказаться далеко за пределами чертежа. Например, при $A_1B_1 \parallel A_3B_2$ точка C_1 просто «уйдет в бесконечность». (При этом прямая C_2C_3 будет также параллельна A_1B_1 и B_2A_3 .) Если же две из трех точек C_1, C_2 и C_3 «уходят в бесконечность», то согласно теореме 1а и третья также должна оказаться «в бесконечности»; в этом случае удобно говорить, что все три точки C_1, C_2, C_3 лежат на одной «бесконечно удаленной прямой» с.

К этому частному случаю можно свести и самый общий с помощью геометрического преобразования, хорошо знакомого художникам, архитекторам и фотографам — *центральной проекции* (рис. 4); художники со времен Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера называют его «линейной перспективой». Проекция с центром S каждой точке M ставит в соответствие точку M' пересечения прямой SM с некоторой плоскостью p (плоскостью проекции). Важно, что при этом образы точек одной прямой вновь лежат на одной прямой, хотя некоторые пересекающиеся прямые переходят в параллельные (их точка пересечения «уходит в бесконечность») и наоборот.

Замечательная идея Дезарга, лежащая в основе проективной геометрии: мысленно дополнить плоскость «бесконечно удаленными точками», в каждой из которых пересекаются параллельные друг другу прямые, и считать все эти точки лежащими на одной «бесконечно удаленной прямой» — тогда при центральной проекции одной плоскости на другую не возникает никаких исключений, это преобразование становится взаимнооднозначным. Эта «проективная» точка зрения будет постоянной побочной темой нашего рассказа, но мы не будем развивать ее здесь подробно (см. [1], [2]).

Конфигурации Паскаля

Теореме Паскаля можно придать тот же красочный вид, что и теореме Паппа о 9 точках.

Теорема 2. Пусть три красные прямые пересекают три голубые в девяти черных точках. Если шесть из этих точек лежат на одной окружности, то три остальные лежат на одной прямой (рис. 1).

Верна и в определенном смысле «обратная» теорема.

Теорема 2'. Если из девяти черных точек пересечения тройки красных с тройкой голубых прямых три лежат на прямой, а еще пять — на окружности, то и девятая точка лежит на той же окружности.

Как понял сразу же сам Паскаль, его теорему можно значительно обобщить: вместо окружности в ней может фигурировать эллипс, гипербола или парабола, ибо любую из этих кривых можно получить центральной проекцией окружности. Поэтому из конфигурации Паскаля для окружности можно получить конфигурацию для любой из этих кривых.

Все эти кривые называются *кривыми второго порядка*, поскольку каждую из них можно задать уравнением вида $P(x, y) = 0$, где P — многочлен второй степени:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Любопытно, что теорема Паскаля остается верной и для вырожденного случая, когда многочлен P раскладывается на два линейных множителя: в этом случае кривая второго порядка $P(x, y) = 0$ превращается в пару прямых, а теорема Паскаля — в теорему Паппа.

Существует много различных доказательств теоремы Паскаля для окружности (см., например, «Квант» 1982, № 7, с. 2, книги [1], [2], [3]).

Интересно, что доказать ее можно тем же способом, каким мы свели общую теорему Паппа к частному случаю — спроектировать конфигурацию Паскаля так, чтобы «паскалева прямая» с превратилась в бесконечно удаленную, а окружность — в зависимость от того, пересекалась ли она с прямой s , касалась ее или не имела с ней общих точек — в гиперболу с перпендикулярными асимптотами, параболу или вновь в окружность (см. «Квант» № 3, 1987, с. 22–23). Теперь остается доказать аналог теоремы 1а для шестизвенной ломаной, вершины которой лежат на одной из полученных кривых. Для этого нужно придумать преобразования, при которых кривая скользила бы по самой себе, а параллельные прямые переходили бы в параллельные (такие преобразования называют *линейными*). Для окружности это — обычные повороты, для параболы $y=ax^2$ «неравномерные растяжения» $x'=kx$, $y'=k^2y$, для гиперболы $xy=a$ — «гиперболические повороты» $x'=kx$, $y'=y/k$.

Кубические кривые

Алгебраической кривой третьего порядка, или *кубической кривой*, называется множество точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению $P(x, y)=0$, где P — многочлен третьей степени: $P(x, y)=ax^3+bx^2y+\dots+l$ (всего 10 членов). Заметим, что это определение не зависит от выбора системы координат: при переходе от одной системы координат к другой, даже косоугольной, старые координаты выражаются через новые по линейным формулам

$$x=a_1x'+b_1y'+c_1, \quad y=a_2x'+b_2y'+c_2, \quad (1)$$

поэтому в новых координатах кривая будет задаваться также многочленом третьей степени.

Кубическая кривая называется *приводимой*, если многочлен $P(x, y)$ раскладывается в произведение многочленов меньшей (первой и второй) степени, и *неприводимой* — в противном случае. Такую кривую мы будем обозначать иногда буквой Ω — некоторые из очень разнообразных по форме кубических кривых имеют похожий вид. Например, кривая $(x+1)(x^2+y^2-1)+\varepsilon=0$ при малом ε (скажем, $\varepsilon=0,001$) очень близка к приводимой кривой $(x+1)(x^2+y^2-1)=0$, состоящей из прямой $x=-1$ и окружности $x^2+y^2=1$. Если многочлен раскладывается в произведение трех линейных многочленов: $P=L_0L_1L_2$, то кривая $P(x, y)=0$ будет объединением трех прямых $L_0=0$, $L_1=0$, $L_2=0$.

Оказывается, любой многочлен третьей степени можно представить в виде суммы двух таких «сильно приводимых» многочленов; это будет видно из доказательства следующей теоремы о 9 точках на кубической кривой.

Теорема 3. Пусть три красные прямые пересекают три голубые в девяти черных точках. Если восемь из этих точек лежат на некоторой кубической кривой, то и девятая лежит на той же кубической кривой.

В специальном случае, когда кривая приводима, отсюда получаются теоремы Паппа и Паскаля: если кривая распадается на три (черных) прямых, то теорема 3 превращается в теорему 1, а если на прямую и кривую второго порядка, то в теоремы 2 и 2'. Таким образом, доказав теорему 3, мы получим одновременно все предыдущие результаты, причем сразу в общем случае!

Пусть прямые $R_i=0$ и $L_j=0$ пересекаются в точке A_{ij} (рис. 5; i и j принимают значения 0, 1 и 2). Докажем, что если все точки A_{ij} , кроме A_{22} , лежат на кубической кривой $P(x, y)=0$, то и A_{22} — тоже. Положим $K=L_0L_1L_2$, $\Gamma=R_0R_1R_2$ и докажем, что для некоторых чисел λ и μ выполнено тождество $P=\lambda K+\mu\Gamma$. Отсюда будет следовать, что $P=0$ в точке A_{22} : ведь $K=0$ на красных прямых, $\Gamma=0$ на голубых, так что в черных точках выполнены оба эти равенства.

Удобно считать, что прямые $L_0=0$ и $R_0=0$ — это оси координат, так что $L_0(x, y)=x$, $R_0(x, y)=y$ (этого можно добиться, заменив переменные по формулам (1)); при этом $K(x, y)$

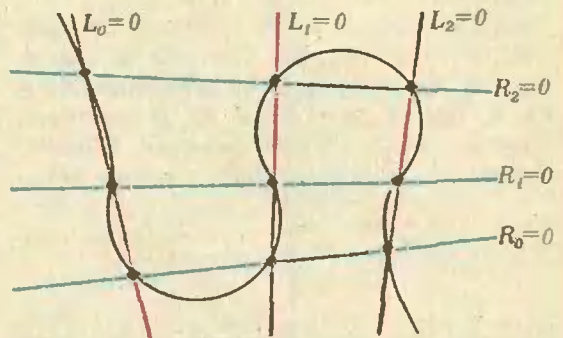


Рис. 5. Теорема 3 о 9 точках на кубической кривой. Уравнение кубической кривой Ω , проходящей через 8 из 9 черных точек, можно получить как линейную комбинацию уравнений $R_0R_1R_2=0$ и $L_0L_1L_2=0$, задающих тройки красных и голубых прямых: $\lambda R_0R_1R_2+\mu L_0L_1L_2$, поэтому кривая Ω обязательно проходит и через девятую черную точку.

имеет вид

$$x(x - \alpha_1 - \gamma_1 y)(x - \alpha_2 - \gamma_2 y),$$

где α_1 и α_2 — координаты точек A_{01} и A_{02} на оси Ox . Поскольку кривая $P(x, y) = 0$ проходит через точки A_{00} , A_{01} и A_{02} , многочлен $P(x, 0) = \lambda K$, рассматриваемый на оси $y = 0$, обращается в 0 при x , равном 0, α_1 и α_2 , поэтому $P(x, 0) = \lambda x(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ при некотором λ , откуда $P(x, 0) = \lambda K(x, 0)$. Аналогично докажем, что $P(0, y) = \mu \Gamma(0, y)$ при некотором μ (здесь используются точки A_{00} , A_{10} и A_{20}).

Рассмотрим теперь многочлен $G = P - \lambda K - \mu \Gamma$. Он тождественно равен 0 при $x = 0$ (ведь K содержит множитель x), а также и при $y = 0$, поэтому он должен иметь вид $G = xyG_1$, где G_1 — многочлен степени не выше первой (ведь степень G не выше трех). С другой стороны, в точках A_{11} , A_{12} и A_{21} , где $G = 0$ и $xy \neq 0$, многочлен G_1 должен обращаться в 0, а эти точки не лежат на одной прямой. Это возможно, лишь если G_1 , а с ним и G тождественно равны 0.

Теорема 3 доказана.

Сложение точек на кубической кривой

Многие интересные геометрические свойства кубических кривых, а также их разнообразные применения в анализе, теории чисел и даже комбинаторике (теории кодирования) связаны с операцией сложения точек. Существование такой естественной операции — характерное свойство именно (неприводимых) кривых третьей степени, а ее геометрическое определение основано на том, что прямая, пересекающая кривую Ω в двух точках, обязательно имеет с ней еще и третью точку пересечения. Мы увидим, что теорема 3 выражает замечательное свойство этой операции — *ассоциативность*: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Сумма $A + B$ двух точек A, B кривой Ω определяется так. На Ω выбирается некоторая «начальная» точка E . По двум точкам A, B строится третья точка D пересечения прямой AB с Ω , а затем — третья точка пере-

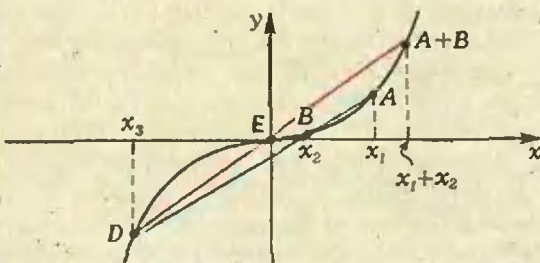


Рис. 6. Сложение точек на графике $y = x^3$. Три точки этого графика лежат на одной прямой, если и только если сумма их абсцисс равна 0.

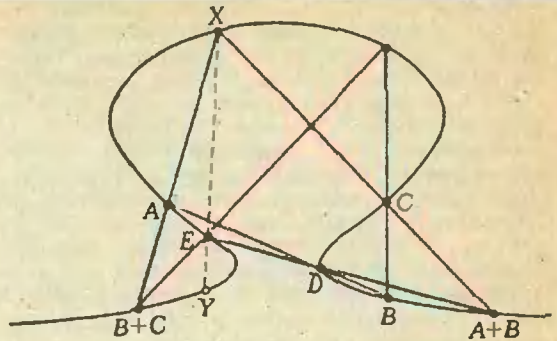


Рис. 7. Ассоциативность сложения точек на кубической кривой. Равенство $A + (B + C) = (A + B) + C$ следует из теоремы о 9 точках.

сечения с Ω прямой DE ; это и есть, по определению, точка $A + B$.

Особенно просто складываются точки на кривой $y = x^3$ (рис. 6): если за начальную точку E взять начало координат $(0; 0)$, то суммой точек с абсциссами x_1 и x_2 будет точка с абсциссой $x_1 + x_2$! В самом деле, три точки $A(x_1; x_1^3)$, $B(x_2; x_2^3)$, $D(x_3; x_3^3)$ лежат на одной прямой, если выполнено условие

$$\frac{x_1^3 - x_3^3}{x_1 - x_2} = \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 - x_3},$$

которое после упрощения принимает вид

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

а поскольку E — центр симметрии графика $y = x^3$, точка $A + B$ (третья точка пересечения прямой DE с этим графиком) имеет координаты $(-x_3; -x_3^3)$, т. е. абсциссу $-x_3 = x_1 + x_2$.

Чтобы операция сложения точек была определена для любых двух точек, нужно сделать некоторые уточнения: учесть точки касания прямых с Ω как двукратные (а для точек перегиба — трехкратные) точки пересечения, добавить к кривой «бесконечно удаленные» точки, выбросить «особые» точки, появляющиеся на некоторых кривых. Об этом подробнее говорилось в статье Ю. П. Соловьева в предыдущем номере «Кванта».

Для такого сложения точек на кривой Ω свойство *коммутативности* $A + B = B + A$ очевидно (прямая AB совпадает с прямой BA). А вот ассоциативность доказать не так просто. Это удастся сделать с помощью теоремы 3, проведя 7 прямых (рис. 7). По этой теореме точка X пересечения прямых, соединяющих A с $B + C$ и $A + B$ с C , лежит на Ω , поэтому

$$A + (B + C) = (A + B) + C = X.$$

Построение полиграмм

Назовем *полиграммой* тройку бесконечных последовательностей точек на плоскости — красных (A_i), черных (B_i) и голубых (C_i), для которых выполнено такое условие: если $k + l +$

$+m=0$, то точки A_k, B_l и C_m лежат на одной прямой ($k, l, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Этой бесконечной конфигурации была посвящена задача М585 из «Задачника Кванта». (Интересно, что автор задачи В. В. Батырев прислал нам задачу, когда она была еще 10-классником, а теперь он окончил мехмат МГУ и стал его научным сотрудником — специалистом по алгебраической геометрии.) Самую простую полиграмму легко построить на клетчатой бумаге (рис. 8), но оказалось, что существует множество разнообразных полиграмм, причем их описание тесно связано со всем содержанием нашей статьи, включая даже «сложение точек» на кубической кривой.

Попробуйте экспериментально проверить и затем обосновать следующие утверждения (в этом помогут рисунки 9—11, где изображены некоторые примеры полиграмм; номера расставлены лишь у некоторых первых точек — по ним легко восстанавливаются остальные).

1. Для любых трех прямых a, b, c по произвольно заданным точкам A_0 (на a), B_0 и B_1 (на b) строится единственная полиграмма, у которой все точки A_k лежат на a , B_l на b и C_m на c .

2. Пусть заданы окружность σ (это может быть также эллипс, гипербола или парабола) и три точки: A_0 на σ , B_0 и B_1 — не лежащие на σ . Тогда существует единственная полиграмма, у которой все точки A_k и C_m лежат на σ , а B_l — на прямой B_0B_1 .

3. Если задана неприводимая кубическая кривая Ω и на ней три точки A_0, B_0 и B_1 , то по ним однозначно восстанавливается полиграмма, лежащая на Ω , причем ее можно записать в виде тройки арифметических прогрессий $A_k = A_0 + kD, B_l = B_0 + lD, C_m = C_0 + mD$ (D — точка на Ω , определяемая условием $B_0 + D = -B_1$); правда, если D — такая точка на (неособой) кривой Ω , что $nD = \underbrace{D + \dots + D}_n = E$, полиграмма получится не бесконечной, а периодической (такие конфигурации рассмотрены в статье [4] в связи с задачей о том, как много троек из заданного числа точек плоскости могут лежать на прямых).

4. Пусть заданы шесть точек $A_0, A_{-1}, A_1, B_0, B_1$ и B_2 на плоскости (в общем положении). По ним можно однозначно восстановить полиграмму, все точки которой автоматически окажутся лежащими на некоторой кубической кривой.

Для доказательства общих утверждений о полиграммах полезны следующие соображения. Центральная проекция любой полиграммы — снова полиграмма. Каждые 9 точек полиграммы $A_k, A_{k+r}, A_{k+s}, B_l, B_{l+r}, B_{l+s}, C_m, C_{m+r}, C_{m+s}$, где $k+l+m+r+s=0$, образуют конфигурацию, удовлетворяющую условиям теоремы 3; в частности, для полиграмм на трех прямых (рис. 9) они образуют 9 точек

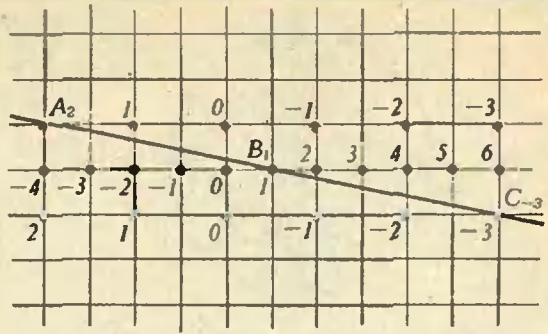
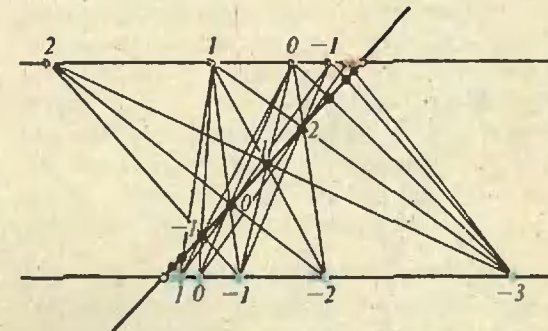


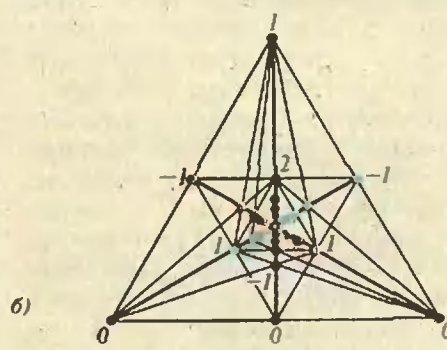
Рис. 8. Пример полиграммы. Три бесконечных последовательности красных, черных и голубых точек, занумерованных целыми числами, образуют полиграмму: три разноцветные точки A_k, B_l и C_m лежат на одной прямой, если сумма их номеров $k+l+m$ равна 0. (В этом примере B_{-k-m} — середина отрезка A_kC_m для любых k и m .)



а)

Рис. 9. Полиграммы на трех прямых. На каждой из них можно бесконечным числом способов выбрать три тройки разноцветных точек, служащих вершинами конфигурации Палпа из 9 точек.

а) Множества красных и голубых точек гомотетичны относительно каждой черной точки B_l , причем коэффициент гомотетии равен $k_k = -k_0 d'$.



б)

б) Эту полиграмму, целиком расположенную в треугольнике, можно получить центральной проекцией рисунка 8. Расстояния от точек каждого цвета до центра треугольника пропорциональны числам $1, 1/2, 1/3, \dots$.

Можно строить и полиграммы на трех прямых, попарно пересекающихся в трех различных точках. Такие полиграммы можно получать центральной проекцией рисунка а).

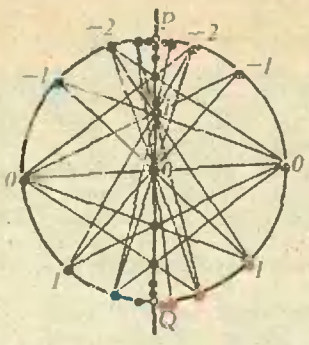
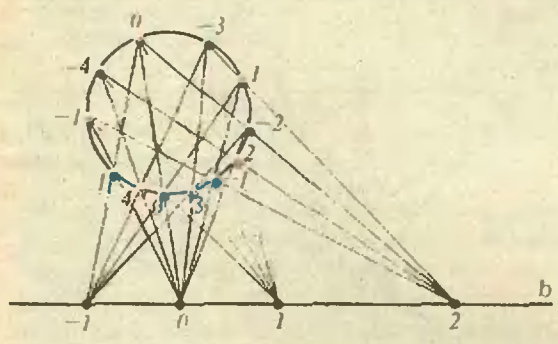


Рис. 10. Полиграммы на прямой и окружности. На них можно бесконечным числом способов выделить конфигурацию Паскаля.

а) Отношения расстояний от точек каждого цвета до концов диаметра PQ: A_1P/A_1Q , C_1P/C_1Q и B_1Q/B_1P образуют геометрические прогрессии с одним и тем же знаменателем q .



б) Если эту триграмму спроектировать так, чтобы прямая b с черными точками отобразилась в бесконечно удаленную, а окружность — снова в окружность, то образы красных (а также голубых) точек с соседними номерами будут отстоять друг от друга на одну и ту же дугу $\Theta=360^\circ$ окружности; при иррациональном Θ красные и голубые точки будут всюду плотно заполнять окружность, а при рациональном Θ полиграмма получится периодической.

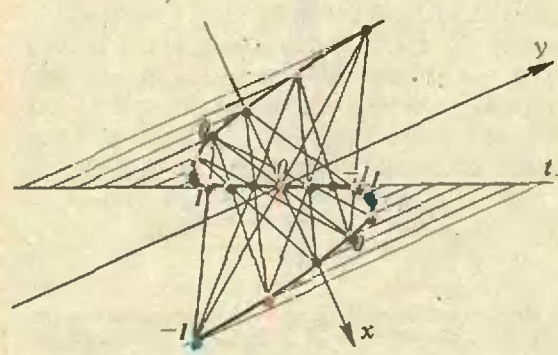


Рис. 11. Полиграмма на графике $y = x^3 - ax$. Проекция точек каждого цвета на касательную Ot по направлению оси Oy составляют ряд равноотстоящих точек — арифметическую прогрессию.

конфигурации Паппа, а для полиграмм на прямой и окружности (рис. 10) — конфигурации Паскаля.

Шкала из точек с целочисленными номерами, возникающая при построении полиграмм, наводит на мысль, что существует непрерывный аналог полиграмм; в самом деле, оказывается, точкам любой — приводимой или неприводимой — кубической кривой Ω можно сопоставить числовые значения t — ввести на кривой Ω «хорошую параметризацию» — так, чтобы для любой прямой, пересекающей Ω в трех точках с параметрами t_1, t_2, t_3 , выполнялось условие $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. (Если кривая Ω содержит овал, — окружность на рисунке 10б, то значение параметра t определяется с точностью до прибавления целого кратного «периода» T , на который меняется значение t при обходе овала.) Как мы видели (рис. 6), на кривой $y = x^3$ «хороший параметр» — это абсцисса точки (x, y) . Приведем еще один пример. Пусть Ω состоит из трех прямых AB, BC, CA . Условие, что точки M, N, L , лежащие соответственно на этих прямых, расположены на одной прямой, имеет вид

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = 1$$

(теорема Менелая). Здесь за «хороший параметр» t на каждой прямой можно принять логарифм соответствующего отношения: если произведение трех чисел равно 1, то сумма их логарифмов равна 0. Точно так же можно в явном виде указать «хорошую параметризацию» для других приводимых и особых кубических кривых, таких, как $y^2 = x^3$ и «лист Декарта» $y^2 = x^3 - x^2$ (см. первые страницы книги [6]).

Для неприводимых неособых кубических кривых существование «хорошей параметризации» тесно связано с операцией сложения точек, а ее явное выражение требует знакомства с теорией эллиптических функций — красивейшей областью математического анализа, которой занимались многие крупнейшие математики XIX века.

Сравнительно недавно (1976 г.) американский математик Ф. Гриффитс заметил, что наличие «хорошей параметризации» — характеристическое свойство именно кривых третьего порядка: если на плоскости расположены три кусочка кривых с параметрами t_1, t_2 и t_3 , так что через каждую точку одного из них можно провести прямую, пересекающую два других, и при этом для параметров трех точек пересечения всегда выполнено условие $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, то все эти три кусочка содержатся в одной кубической кривой. (Это — непрерывный аналог утверждения о том, что любая полиграмма лежит на кубической кривой.)

Литература

1. Яглом И. М. Геометрические преобразования, ч. II — М.: Л.: Гостехиздат, 1956.
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии, ч. II — М.: Наука, 1986.
3. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986.
4. Математический цветник. — М.: Мир, 1983 (статья С. Барра «Как сажать деревья», с. 117—129).
5. Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969.
6. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972 (и план 1988).

ПОКА ЧАЙНИК НЕ ЗАКИПЕЛ...

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ,
А. И. ШАПИРО

Ритуалу чаепития посвящены восточные трактаты и главы в специальных книгах. И все же, посмотрев на этот процесс под несколько иным углом зрения, в нем можно найти множество интересных физических явлений, объяснения которым нет даже в самом толстом кулинарном руководстве. Давайте именно с этой точки зрения подойдем к процессу чаепития, а точнее — к процессу подготовки к нему.

Начнем с эксперимента. Поставим два совершенно одинаковых чайника с равными количествами холодной воды на конфорки одинаковой мощности. Один из них закроем крышкой, а второй оставим открытым. Какой чайник закипит раньше?

Ответ на этот вопрос знает любая опытная хозяйка. Желая вскипятить воду побыстрее, она, не задумываясь, накрывает кастрюлю крышкой, и на поставленный вопрос сразу ответит, что скорее закипит чайник, накрытый крышкой. Ну что же, убедимся в ее правоте — вначале опытным путем, дождавшись кипения наших чайников, а потом объясним результат поставленного опыта с точки зрения молекулярной физики.

Пока чайники нагреваются, поставим на третью конфорку плиты еще один точно такой же чайник с тем же количеством холодной воды, что и первые два, и попробуем его вскипятить быстрее (при той же мощности конфорки). Для этого нужно каким-либо способом быстро повысить температуру воды в нем, «обогнав» ее нагрев в двух первых чайниках. Например, опустить в чайник еще и кипятильник. Ну, а если кипятильника нет?

Вспомним, что для того чтобы повысить температуру воды в какой-либо емкости, в нее достаточно добавить более горячей воды. Может быть, такой прием ускорит закипание воды в третьем чайнике? От-

нюдь. Не только не ускорит, но еще и замедлит. Чтобы убедиться в этом, представим себе, что вода массой m_1 , находившаяся первоначально в чайнике при температуре t_1 , не смешивается и не обменивается теплом с долитой горячей водой массой m_2 и температурой t_2 ($t_2 > t_1$). Тепло, которое необходимо было первоначально передать воде массой m_1 для доведения ее до кипения (до температуры t_k) — $Q_1 = cm_1(t_k - t_1)$. Теперь же придется дополнительно разогреть от t_2 до t_k еще и долитую горячую воду массой m_2 . Поэтому полное количество теплоты составит

$$Q = cm_1(t_k - t_1) + cm_2(t_k - t_2).$$

(Понятно, что наше «абсурдное» предположение о том, что порции воды остались неперемешанными, никак не повлияло на закон сохранения энергии в системе, а лишь позволило нам рассмотреть явление проще и быстрее.)

Пока мы безуспешно возились с третьим чайником, первый, с закрытой крышкой, уже начинает «петь». Попробуем выяснить причину этого знакомого всем звука и оценить его характерную частоту.

Первой причиной можно предположить колебания жидкости, возникающие при отрыве пузырьков пара от дна и стенок сосуда. Эти пузырьки чаще всего зарождаются на неоднородностях и микротрещинках поверхности. Характерные размеры пузырьков до закипания воды порядка 1 мм (при кипении они значительно возрастают и могут достигать до сантиметра). Для оценки частоты возникающего звука нам нужно найти время отрыва пузырьков от дна $г$. Именно это время характеризует длительность толчка, который получает жидкость в процессе отрыва пузырька, и, следовательно, период возникающих в жидкости колебаний. Соответственно, час-

тота генерируемого звука определится величиной, обратной этому времени: $\nu \sim \tau^{-1}$.

Пока пузырек пребывает на дне в покое, на него действуют выталкивающая его вверх сила Архимеда $F_A = \rho_w g V_n$ (V_n — объем пузырька) и удерживающая его на дне сила поверхностного натяжения. Заведомо малой силой тяжести мы пренебрегаем. По мере увеличения объема пузырька сила Архимеда возрастает и в некоторый момент становится больше силы поверхностного натяжения. Пузырек начинает свое движение вверх. Понятно, что полная сила, действующая на пузырек в процессе его отрыва от дна, по порядку величины равна F_A . Масса же пузырька, движущегося в жидкости, определяется не его собственной ничтожно малой массой (массой заключенного в нем воздуха и пара), а так называемой «присоединенной» массой, которая для сферического пузырька составляет $m^* = \frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho_w$ (в этой формуле ρ_w — плотность жидкости, а r_0 — радиус пузырька). Величина m^* фактически определяет ту массу жидкости вокруг пузырька, которая оказывается вовлеченной в движение при перемещении пузырька.

Таким образом, для ускорения пузырька на начальном этапе движения находим:

$$a \sim \frac{F_A}{m^*} = \frac{\rho_w g \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3}{\frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho_w} = 2g.$$

Время отрыва пузырька от дна можно теперь оценить, считая его движение равноускоренным. На расстояние порядка своего размера он поднимается за время

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2r_0}{a}} \sim 10^{-2} \text{ с.} \quad (*)$$

Соответствующая характерная частота генерируемого при отрыве пузырьков звука составляет $\nu_1 \sim \tau_1^{-1} \sim 100$ Гц.

Существует и вторая причина шума, возникающего при нагревании воды в чайнике. Для того чтобы добраться до нее, проследим судьбу пузырька пара после его отрыва от дна. Всплывая, пузырек попадает в еще не достаточно прогретые верхние слои воды. Заполняющий пузырек



насыщенный пар при этом охлаждается, его давление падает и уже не может компенсировать внешнего давления на пузырек со стороны воды. В результате пузырек быстро схлопывается — в жидкости распространяется звуковой импульс.

Оценим характерную частоту возникающего звука. Запишем уравнение Ньютона для массы воды m , устремляющейся внутрь пузырька при его схлопывании:

$$ma = F_d = S \cdot \Delta p.$$

Здесь $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности пузырька, на которую действует сила давления F_d , а Δp — разность давлений на границе пузырька, а — ускорение движения границы к центру пузырька. Понятно, что в процессе такого схлопывания вовлечена масса воды, по порядку величины равная произведению плотности воды на объем пузырька: $m \sim \rho_w r^3$. Таким образом, уравнение Ньютона может быть переписано в виде

$$\rho_n r^3 a \sim r^2 \cdot \Delta p.$$

Пренебрегая дополнительным давлением, обусловленным натяжением искривленной поверхности пузырька, а также небольшим количеством воздуха, которое может в нем содержаться, будем считать Δp постоянным (зависящим только от перепада температур между придонными и верхними слоями воды). Величину ускорения оценим из кинематического соотношения $r_0 = a\tau_2^2/2$ как $a \sim r_0/\tau_2^2$, где τ_2 — искомое время схлопывания пузырька. Тогда $\rho_n r_0^2/\tau_2^2 \sim \Delta p$, откуда

$$\tau_2 \sim r_0 \sqrt{\frac{\rho_n}{\Delta p}}. \quad (**)$$

Вблизи $t_k = 100^\circ\text{C}$ давление насыщенного пара падает примерно на $3 \cdot 10^3$ Па при понижении температуры на 1°C (см. таблицу). Поэтому

$t, ^\circ\text{C}$	96,18	99,1	99,6	99,9	100	101	110,8
$p, \text{кПа}$	88,26	98,07	100	101	101,3	105	147

для оценки можно принять $\Delta p \sim 10^3$ Па, и в результате для времени схлопывания пузырька получаем $\tau_2 \sim 10^{-3}$ с. Характерная частота возникающего при этом звука $\nu_2 \sim \tau_2^{-1} \sim 10^3$ Гц.

Доводом в пользу такого происхождения шума служит тот факт, что по мере повышения температуры воды частота характерного высокочастотного шума постепенно понижается, и это согласуется с полученной нами формулой (**). Непосредственно перед кипением пузырьки пара перестают схлопываться даже в верхних слоях воды. Тогда единственным механизмом возбуждения звука оказывается рассмотренный выше отрыв пузырьков от дна — частота «пения» чайника заметно понижается. После закипания воды «голос» чайника может снова измениться (особенно если открыть крышку) — это булькают пузыри, лопааясь непосредственно на поверхности воды. Здесь уже оказывается важной и степень заполнения чайника, и его форма.

Таким образом, мы приходим к выводу, что шум чайника перед его закипанием связан с рождением на

горячем дне пузырьков пара, отрывом их от дна и гибелью в верхних, еще не достаточно прогретых слоях воды. Эти процессы очень интересно наблюдать непосредственно при нагревании воды в стеклянном чайнике с прозрачными стенками. Надо сказать, что мы не первые, кто заинтересовался этим вопросом и разобрался в нем. Еще в XVIII веке шотландский ученый Джозеф Блэк изучал «пение» нагретых сосудов и установил, что в этом «пении» участвует дуэт: поднимающиеся пузырьки нагретого воздуха и вибрация стенок сосуда».

Вернемся теперь к нашим чайникам на плите. Как и ожидалось, первым закипел чайник под закрытой крышкой. Об этом нас извещает вырывающаяся из его носика струя пара. (Не лишним будет напомнить, что видим мы не сам пар — он невидимый; попадая в сравнительно холодный воздух, пар немедленно конденсируется в мельчайшие капельки воды — образуется туман. Струю тумана мы и видим.) А какова скорость этой струи?

Задачу нетрудно решить, если заметить, что в установившемся процессе кипения практически вся подводимая к чайнику энергия нагревателя расходуется на испарение воды. Филателисты знают, что, когда нужно отпарить марку от конверта, воду наливают лишь на дно чайника, чтобы весь образующийся пар выходил через носик. Будем считать, что и в нашем случае носик свободен и пар выходит наружу только через него. Пусть в результате подвода энергии за время Δt испаряется масса воды ΔM . Ее можно определить из уравнения

$$r \cdot \Delta M = P \cdot \Delta t,$$

где r — удельная теплота парообразования, а P — мощность нагревателя. За это же время Δt такая же масса пара покидает чайник через носик. Если площадь выходного отверстия носика s , плотность пара под крышкой чайника ρ_n , а искомая скорость v , то

$$\Delta M = \rho_n s v \cdot \Delta t.$$

Плотность насыщенного пара при $T_n = 373$ К можно взять из таблицы или, если таблицы нет под рукой, оценить из уравнения Менделеева —

Клапейрона:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{p_{\text{н}} \mu_{\text{H}_2\text{O}}}{RT_{\text{к}}} \approx 0,6 \text{ кг/м}^3.$$

Таким образом, для скорости вытекания пара из носика получаем окончательно:

$$v = \frac{PRT_{\text{к}}}{r p_{\text{н}} \mu_{\text{H}_2\text{O}}^2}.$$

Подставляя для оценки $P=500$ Вт, $s=2$ см², $r=2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $p_{\text{н}}=10^5$ Па, находим, что $v \sim 1$ м/с.

И вот, наконец-то, закипел чайник с открытой крышкой. Он заметно отстал от первого. Кстати, снимать с плиты его следует с осторожностью — можно здорово обжечься паром. А что обжигает сильнее — пар или кипяток? Прежде чем ответить на этот вопрос, следует его уточнить: что сильнее обжигает — определенная масса кипятка или такая же масса пара? Обратимся снова к оценкам.

Пусть объем, занятый насыщенным стоградусным паром под крышкой чайника, составляет $V_1=1$ л и, скажем, одна десятая его часть при открывании крышки сконденсируется на руке. Как мы уже выяснили, плотность пара при $t_{\text{к}}=100$ °С составляет 0,6 кг/м³. Поэтому на руке окажется около 0,06 г пара. При конденсации и последующем охлаждении от 100 °С до температуры тела t_0 ($t_0 \approx 37$ °С) выделится тепло $\Delta Q = r m_{\text{п}} + c m_{\text{п}} (t_{\text{к}} - t_0) \approx 150$ Дж. Легко убедиться, что для того же теплового воздействия понадобится почти в десять раз большая масса кипятка. Кроме того, при ожоге паром значительно большей оказывается площадь поражения. Таким образом, пар обжигает сильнее кипятка в первую очередь из-за выделяющегося при конденсации значительного тепла.

Но мы отвлеклись от обсуждения результата нашего опыта с двумя чайниками. Почему же все-таки отстал чайник с открытой крышкой? Разберемся в этом подробнее. Ответ почти очевиден: в процессе нагревания воды в открытом чайнике наиболее быстрые ее молекулы имеют возможность беспрепятственно покидать чайник, унося с собой энергию и как бы охлаждая этим оставшуюся в чайнике воду (этот процесс есть не что иное, как испарение). Поэтому нагревателю в этом случае приходится не только довести воду в



чайнике до кипения, но и часть ее испарить в процессе нагревания. Понятно, что на это уходит большее количество энергии (а следовательно, и времени), чем при кипячении воды в закрытом чайнике, где вырвавшиеся из воды «быстрые» молекулы очень скоро образуют в замкнутом пространстве под крышкой насыщенный пар и, возвращаясь в воду, отдают свою избыточную энергию обратно.

Однако имеют место и два эффекта, противодействующих рассмотренному. Во-первых, в процессе испарения несколько уменьшается масса воды, которую следует доводить до кипения. Во-вторых, кипение в открытом чайнике при нормальном атмосферном давлении наступает при температуре 100 °С, а в закрытом — при более высокой температуре. Действительно, если чайник налит так, что пары не могут выходить через носик, из-за интенсивного испарения перед кипением давление у поверхности повышается, поскольку оно теперь определяется суммой парциальных давлений находящегося под крышкой небольшого количества воздуха и са-

мих водяных паров, и с ростом внешнего давления должна стать и более высокой температура кипения воды, так как она определяется условием равенства давления насыщенного пара в зарождающемся в жидкости пузырьке внешнему давлению.

Как же быть? Какому из эффектов отдать предпочтение?

В случае, когда возникают подобного рода сомнения, на помощь следует призвать точный расчет или, по крайней мере, оценку по порядку величин обсуждаемых эффектов. Вначале оценим массу воды, которая испаряется из открытого чайника в процессе нагревания его до кипения.

Молекулы в жидкости достаточно сильно взаимодействуют друг с другом. Однако если в кристалле потенциальная энергия взаимодействия значительно превышает кинетическую энергию движения атомов или молекул, а в газе, наоборот, кинетическая энергия хаотического движения значительно превосходит потенциальную энергию взаимодействия молекул, то в жидкости эти величины оказываются одного порядка. Поэтому молекулы жидкости совершают тепловые колебания около некоторых положений равновесия, изредка перепрыгивая в другие. «Изредка» по сравнению с периодом колебаний около положения равновесия. В привычном же нам масштабе времени очень даже часто — за одну секунду молекула в жидкости может менять свое положение равновесия миллиарды раз! Однако далеко не каждая молекула в процессе своих перескоков, даже находясь у поверхности, может вырваться на свободу. Для преодоления сил взаимодействия ей необходимо иметь возможность совершить некоторую работу. Можно сказать, что потенциальная энергия молекулы в жидкости меньше ее потенциальной энергии в паре на величину, равную теплоте испарения, отнесенной к одной молекуле. Если r — удельная теплота испарения, то молярная теплота испарения — μr , а теплота испарения, приходящаяся на одну молекулу, — $U_0 = \frac{\mu r}{N_A}$. Эту

«работу выхода» молекула может совершить только за счет своей кинетической энергии теплового движения. Однако соответствующая вели-

чина средней кинетической энергии $E_k \sim kT$ оказывается значительно меньше U_0 . И все же, согласно законам молекулярной физики, в жидкости всегда существует некоторое количество столь высокоэнергетичных молекул, что они в состоянии преодолеть силы притяжения и вырваться за пределы жидкости. Их число в единице объема определяется выражением

$$n = n_0 e^{-\frac{U_0}{kT}}, \quad (***)$$

где n_0 — концентрация молекул, $e = 2,7182\dots$ — основание натуральных логарифмов.

Ну, а теперь забудем о перепрыгивании молекул жидкости с места на место и будем представлять себе высокоэнергетичные молекулы как некоторый газ. Тогда за малое время Δt через участок поверхности S смогут вырваться высокоэнергетичные молекулы из объема $\Delta V \sim S\bar{v} \cdot \Delta t$. Для оценки мы считаем, что $1/6$ часть всех этих молекул приближается к поверхности со скоростью \bar{v} , которая определяется соотношением $m_0(\bar{v})^2/2 \sim U_0$. Воспользовавшись выражением (***) для скорости испарения — числа молекул, покидающих жидкость в единицу времени, — находим:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{n(S\bar{v} \cdot \Delta t)}{6 \cdot \Delta t} \sim S n_0 \sqrt{\frac{U_0}{m_0}} e^{-\frac{U_0}{kT}}.$$

Масса, уносимая из жидкости в единицу времени, составляет

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = m_0 \frac{\Delta N}{\Delta t} \sim m_0 n_0 \sqrt{\frac{U_0}{m_0}} S e^{-\frac{U_0}{kT}}.$$

Посмотрим, какая масса воды уйдет из чайника при его нагревании на 1К . Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. За время Δt чайник получает от конфорки тепло $\Delta Q = P \cdot \Delta t$ (напомним, что P — полезная мощность конфорки). При этом температура воды повышается на ΔT такое, что

$$P \cdot \Delta t = cM \cdot \Delta T,$$

где M — масса воды в чайнике (теплоемкостью самого чайника мы пренебрегаем). Подставляя в скорость испарения $\Delta t = \frac{cM \cdot \Delta T}{P}$, находим, что

$$\frac{\Delta M}{\Delta T} = \frac{\rho c S M}{P} \sqrt{\frac{r \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{N_A m_0}} e^{-\frac{r \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{N_A kT}} \cdot \Delta T =$$

$$= \frac{\rho c S M}{P} \sqrt{r} e^{-\frac{\mu_{H_2O}}{RT}} \cdot \Delta T.$$

При нагревании чайника температура меняется от комнатной до $T_k = 373$ К. Принимая во внимание, что основная потеря массы происходит при достаточно высоких температурах, подставим в экспоненту некую среднюю температуру $\bar{T} = 350$ К. Для остальных величин примем: $\Delta T \approx 80$ К, $S \approx 10^{-3}$ м², $\rho = 10^3$ кг/м³, $\mu_{H_2O} = 0,018$ кг/моль, $c = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/кг. С учетом этих значений найдем, какая часть воды испаряется в процессе нагревания открытого чайника до кипения:

$$\frac{\Delta M}{M} \sim \frac{\rho c S}{P} \sqrt{r} e^{-\frac{\mu_{H_2O}}{RT}} \cdot \Delta T \sim 3 \cdot 10^{-2}.$$

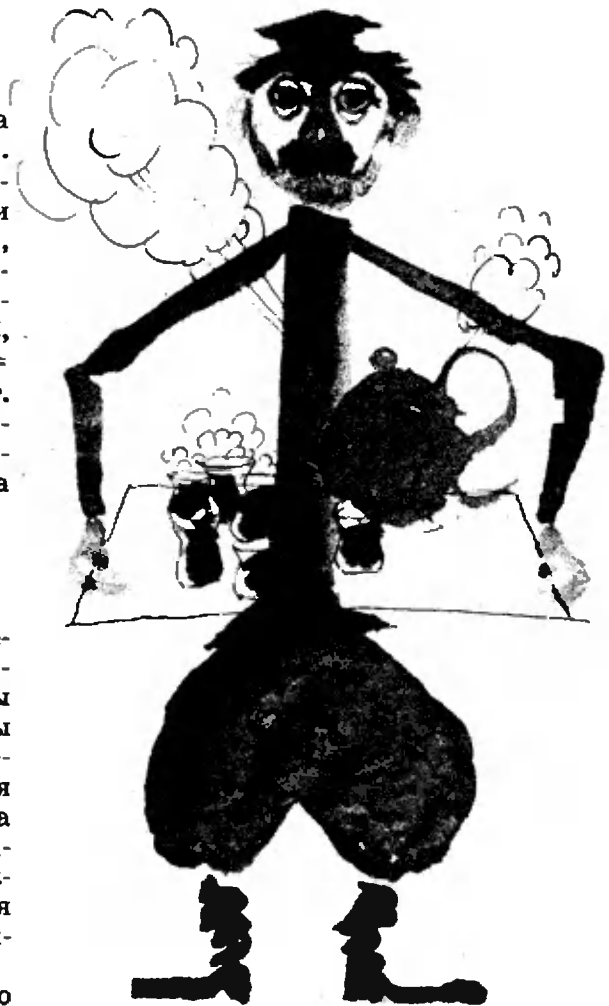
Таким образом, в процессе нагревания чайника без крышки его покидает несколько процентов всей массы воды. Испарение всей этой массы воды идет за счет нагревателя и, естественно, удлиняет процесс закипания открытого чайника. Чтобы понять, насколько, достаточно заметить, что такое испарение для нагревателя эквивалентно доведению до кипения 1/4 массы воды в чайнике (убедитесь в этом сами).

Теперь перейдем к рассмотрению эффектов, замедляющих закипание закрытого крышкой чайника. О первом из них — неизменности массы в процессе нагревания — и говорить нечего. Только что было сказано, что испарение 3 % массы эквивалентно нагреву 25 % массы, так что необходимостью нагрева этих 3 % в закрытом чайнике можно пренебречь.

Второй эффект — повышение давления под закрытой крышкой — также не может составить конкуренции испарению воды из открытого чайника. Действительно, избыточное (по сравнению с атмосферным) давление под крышкой не может превысить веса крышки, отнесенного к его площади (в противном случае крышка начнет подпрыгивать, выпуская пар):

$$\Delta p \leq \frac{m_{кр} g}{S} \sim \frac{3H}{10^{-3} \text{ м}^2} \sim 3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Взглянув еще раз в приведенную выше таблицу (см. с. 11), видим, что такое повышение давления сдвинет



температуру кипения не более чем на $\Delta t_k \approx 0,5$ °С. Соответственно, на доведение чайника до кипения придется затратить дополнительно тепло $\delta Q = cM \cdot \Delta t_k$. Сравнивая величины $cM \cdot \Delta t_k$ и $r \cdot \Delta m$, видим, что неравенство $r \cdot \Delta m \gg cM \cdot \Delta t_k$ выполняется с запасом в 30:1. Таким образом, и повышение температуры кипения в чайнике, закрытом крышкой, не может всерьез противостоять испарению воды с открытой поверхности в чайнике без крышки.

Кстати, на описанном эффекте повышения давления при нагревании воды в замкнутом объеме работает кастрюля-скороварка. В ней сделано маленькое отверстие предохранительного клапана, которое открывается только начиная с некоторого давления; до этого момента она герметична. В результате испарения жидкости в замкнутой объем давление в кастрюле повышается примерно до $1,4 \cdot 10^5$ Па, когда срабатывает клапан, и температура кипения сдви-

гается до $t_k^* = 108^\circ\text{C}$ (см. ту же таблицу на с. 11). Это позволяет сварить пищу гораздо быстрее, чем в обыкновенной кастрюле.

Но мы заговорились, а чайники на плите исходят паром. Сняв чайник с закрытой крышкой с плиты, вы видите, что кипеть он перестает не сразу — некоторое время из его носика еще вырывается струя пара. Какая же часть воды выкипает после снятия чайника с плиты?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, обратимся к рисунку, на котором показано распределение температуры воды по высоте при кипении ее в сосуде, к которому через дно подводится тепло. Из рисунка видно, что тонкий придонный слой воды толщиной $\Delta h \approx 5$ мм сильно перегрет — на его протяжении температура падает от $t_d = 110^\circ\text{C}$ до $t_m = 100,5^\circ\text{C}$. Температура остальной массы воды в чайнике (мы предполагаем уровень воды $h = 10$ см) около $100,5^\circ\text{C}$, а у свободной поверхности жидкости происходит скачок температуры на $\Delta t = 0,4^\circ\text{C}$. Таким образом, после прекращения подачи тепла в массу воды запасено избыточное относительно равновесного количества тепла

$$\Delta Q_1 = c\rho S_d \cdot \Delta h \frac{t_d - t_m}{2} + c\rho S_d (h - \Delta h) \cdot \Delta t,$$

где S_d — площадь дна чайника (который мы предполагаем цилиндрической формы). Это тепло пойдет на испарение массы δm жидкости:

$$S_d \rho c \left(\Delta h \frac{t_d - t_m}{2} + (h - \Delta h) \cdot \Delta t \right) =$$

$$= r \cdot \delta m = \rho S_d \cdot \delta h \cdot r,$$

где δh — понижение уровня жидкости в чайнике в результате этого

испарения. Из последнего соотношения находим:

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{c}{r} \left(\Delta h \frac{t_d - t_m}{2} + (h - \Delta h) \cdot \Delta t \right) \approx \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, после снятия с плиты из чайника выкипит еще около 0,2 % его содержимого.

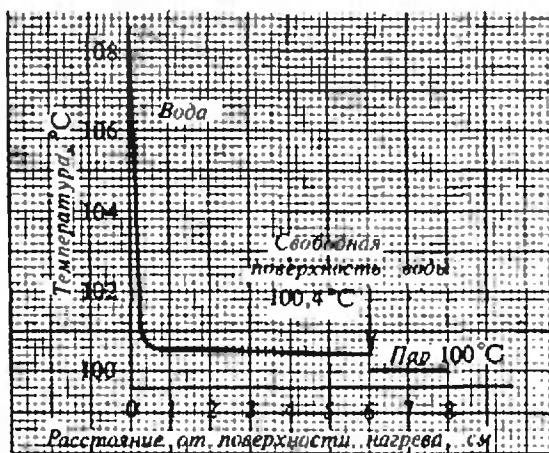
Характерное время выкипания полного чайника с массой воды M (скажем, 2 кг) на плите с полезной мощностью $P = 1$ кВт составляет

$$\tau = \frac{rM}{P} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Соответственно, 0,2 % его массы выкипит за время порядка 10 с (если предполагать, что скорость испарения по порядку величины не меняется по сравнению со стационарным режимом).

Пока мы рассуждали и считали, пришло время разливать чай. Кстати, восточные народы пьют его обычно из пиал. Пиалы, по-видимому, ввели в употребление кочевники — их форма очень удобна при упаковке, они занимают мало места и прочны. Кроме того, они имеют еще одно существенное преимущество перед обычным стаканом. Форма пиалы такова, что верхний слой налитой в нее жидкости благодаря большой поверхности остывает быстрее, чем в стакане, и можно пить, не обжигаясь. В Азербайджане существует специальный сосуд для питья чая — армуди. В нем также большая свободная поверхность сочетается с минимальной поверхностью хранилища горячего чая (нижняя часть сосуда). Старинные фарфоровые чашки также всегда делались расширяющимися кверху. А стаканы как сосуды для питья чая вошли в обиход в XIX веке в связи с дороговизной фарфоровых чашек. Эти произведения декоративного искусства уступали женщинам, а мужчины пили чай из стеклянных стаканов, которые постепенно обзавелись серебрянными подстаканниками с вензелем хозяина.

В заключение подумайте, хороши ли с физической точки зрения серебро и алюминий в качестве материалов для изготовления подстаканников? Каким требованиям должен в первую очередь удовлетворять материал, из которого делается подстаканник?

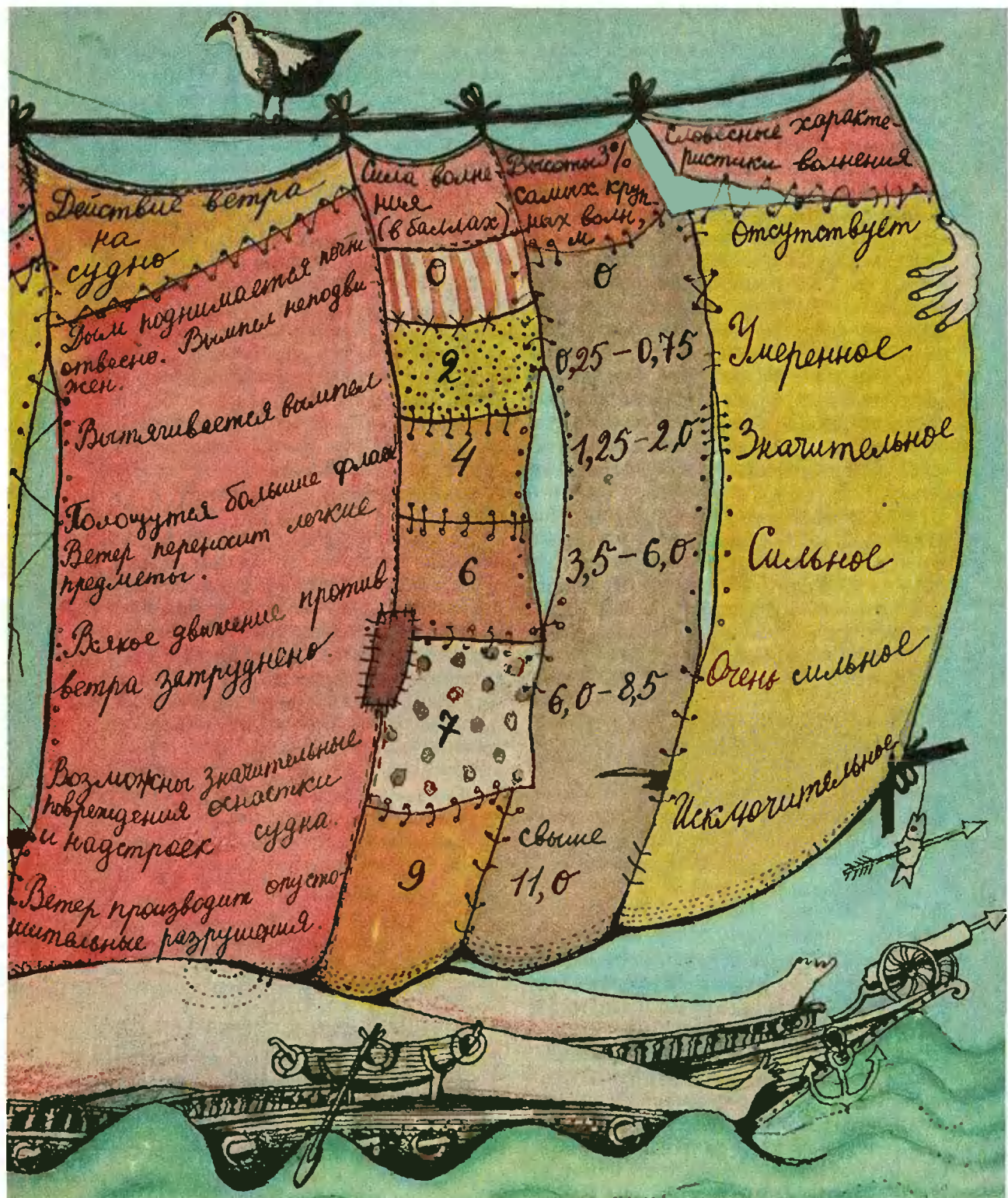




ВОЛНЫ НА ВОДЕ

Доктор физико-математических наук
Л. А. ОСТРОВСКИЙ

Каких только прекрасных слов не было сказано о море, о мыслях и чувствах, возникающих при взгляде на его вечно живую, вечно волнующуюся поверхность! Море — символ грозной стихии, непостоянства, опасности, непостижимого разнообразия. Наблюдения морских волн издавна по-



буждали человека к размышлениям, давали начало новым научным теориям. Сама наука о волнах «зародилась в океане», и, пожалуй, большую часть из того, что известно сегодня о волнах самой различной природы, люди впервые узнали, изучая волны на воде.

Бегущая синусоида
 В школьном курсе физики подробно изучают движение твердых тел. Волна — движение совсем другого рода. Пусть, например, в каком-либо месте водной поверхности появилось возмущение — упал камень, движется судно, подул ветер... Движение

частиц воды, возникшее в этом месте, будет передаваться соседним частицам, и постепенно еще захватит обширную часть поверхности (от камня, например, будут разбегаться круги). При этом каждая частица воды смещается слабо, но движение «переносится» на значительные расстояния. Энергия колебаний передается от одних частиц к другим, как бы по эстафете. Такое изменение состояния среды, распространяющееся в ней и несущее с собой энергию, мы называем волной.

Чтобы понять свойства волновых движений, их удобно разложить на какие-то более простые элементы. В качестве такого элемента чаще всего принимают синусоидальную волну.

Представим себе «синусоидально гофрированную» поверхность воды, и этот «гофр» не стоит на месте, а движется вдоль оси x с постоянной скоростью (рисунок 1). Если разрезать нашу волнистую поверхность

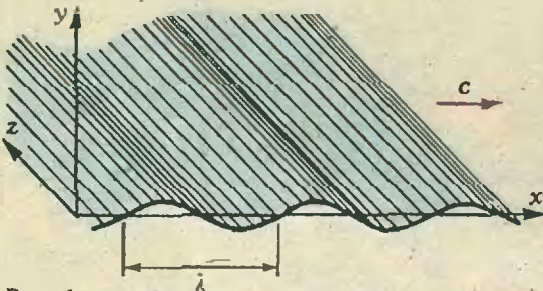


Рис. 1.

вертикальной плоскостью, параллельной оси x , то получится синусоида. Расстояние между двумя соседними вершинами, двумя соседними впадинами, вообще между двумя ближайшими точками, находящимися в одинаковых фазах, одно и то же — это длина волны λ . Так как волна бежит вдоль оси x с постоянной скоростью, любая точка пространства, через которую проходит волна, через определенный промежуток времени T оказывается в одной и той же фазе — колебания точек происходят с периодом T . Ясно, что за это время волна должна сместиться по оси x на расстояние λ . Скорость такого смещения $c = \lambda/T$ называют фазовой скоростью волны.

Но бесконечных синусоид в природе не бывает — волновое дви-

жение где-то начинается и где-то заканчивается. Правда, нередко волна достаточно долго остается почти синусоидальной, но это «почти» оказывается очень существенным. Чтобы понять, в чем дело, рассмотрим две синусоидальные волны с различными, но близкими периодами T_1 и T_2 и близкими длинами λ_1 и λ_2 . Если в какой-то области пространства вершины и впадины обеих волн почти совпадают, то суммарный размах — амплитуда — колебаний точек пространства заметно увеличится. Но по мере удаления от этой области различие в длинах волн приведет к тому, что фазы волн, соответствующие одной и той же точке пространства, будут заметно различны, и в конце концов вершины одной волны начнут попадать на впадину другой — волны будут гасить друг друга. Потом это гашение снова сменится усилением, и вся картина будет периодически повторяться. Вы можете в этом убедиться, нарисовав две синусоиды с одинаковыми амплитудами со слегка различными периодами и сложив их — на рисунке 2, а. Результат такого сложения — на рисунке 2, б: это как бы синусоидальная волна с периодом T , близким к T_1 и T_2 , но амплитуда ее периодически меняется. Такой процесс называют биениями, а волну называют модулированной.

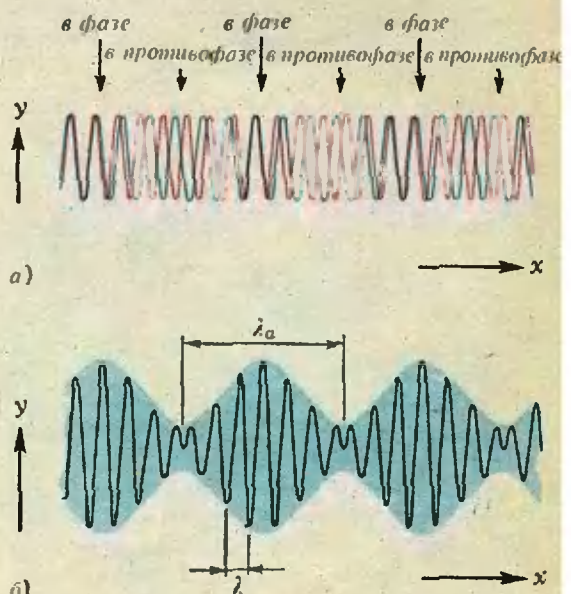


Рис. 2.

Изменение амплитуды при биениях описывается волной, «огibaющей» основные — или, как говорят, несущие — колебания. Найдем длину λ_n этой огibaющей волны и ее период T_n . Сделать это довольно просто. Числа волн исходных синусоид, укладываемых, скажем, между двумя соседними максимумами огibaющей, должны отличаться на единицу, чтобы вершины и впадины этих волн снова совместились. Для первой волны число таких волн есть λ_n/λ_1 , для второй — λ_n/λ_2 . Значит, $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - \frac{\lambda_n}{\lambda_2} = 1$, откуда

$$\lambda_n = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (1)$$

Здесь мы через $\Delta\lambda$ обозначили разность $\lambda_2 - \lambda_1$, а произведение $\lambda_1 \lambda_2$ заменили квадратом среднего геометрического λ_1 и λ_2 ($\lambda^2 = (\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})^2$) — величиной, близкой к тому и другому значению, а также к длине несущей волны (точный расчет для длины несущей волны дает $\lambda_n = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$). Нетрудно получить аналогичное (1) выражение для периода биений: $T_n \approx \approx T^2 / \Delta T$. Теперь можем найти скорость огibaющей — скорость, с которой движутся биения:

$$v = \frac{\lambda_n}{T_n} = \frac{\lambda^2}{T^2} \frac{\Delta T}{\Delta\lambda} = c^2 \frac{\Delta T}{\Delta\lambda}, \quad (2)$$

где c — фазовая скорость несущей волны. Если скорости обеих синусоид, из которых складывается несущая волна, в точности одинаковы, так что $\lambda_1 = cT_1$, а $\lambda_2 = cT_2$, то и $\frac{\Delta\lambda}{\Delta T} = c$, и получается, что $v = c$. В этом случае вся волновая картина бежит со скоростью c как целое. Если же $c_1 \neq c_2$, то и v отличается от c : получается, что несущая волна движется с одной скоростью — фазовой скоростью c , а огibaющая — с другой скоростью v , которую называют групповой. Именно с групповой скоростью переносится волной энергия.

Волна-огibaющая, как и синусоида, бесконечна и во времени, и в пространстве. Только сложив не две, а много (строго говоря — бесконечно много) синусоид с близкими длинами и периодами, можно получить «волновой пакет» — картину колебаний, занимающих ограниченную область

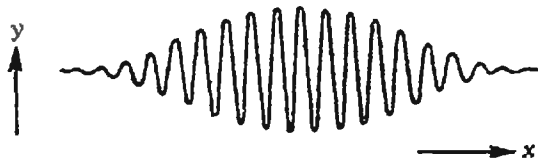


Рис. 3.

пространства (рисунок 3). И опять весь пакет будет двигаться с групповой скоростью, а несущая «синусоида» — с фазовой. Правда, это движение не может продолжаться бесконечно долго. Если продолжатся скорости различных синусоид различны, то групповые скорости для разных пар синусоид, вычисленные по формуле (2), будут различны. Из-за этого на больших расстояниях волновой пакет постепенно изменит свою форму и в конце концов расплывется, «размажется» по пространству. Это явление называют дисперсией, от латинского слова *dispersio* — рассеяние.

Итак, для описания движений в среде с дисперсией нам приходится ввести не одну, а по меньшей мере две скорости!

Волны на воде

Вернемся к волнам на поверхности воды. Для строгого описания этих волн нужно было бы записать уравнения движения частиц воды и попытаться найти их решения. Однако многое можно понять и без уравнений, если воспользоваться так называемым методом размерностей, который часто позволяет исследовать явление, не прибегая к сложным математическим выкладкам.

Посмотрим, от каких физических величин может зависеть скорость распространения синусоидальных волн на поверхности воды. Если пренебречь влиянием атмосферы (ветра), а водоем считать бесконечно глубоким, то в нашем распоряжении — плотность воды ρ , ускорение силы тяжести g и, наконец, период самой волны T (или ее длина λ *). Запишем размерности этих величин:

$$[\rho] = \text{кг/м}^3, [g] = \text{м/с}^2, [T] = \text{с}.$$

* Еще одним размерным параметром, который может влиять на скорость волны, является поверхностное натяжение σ . Однако, как показывает расчет, оно оказывается существенным лишь для очень коротких волн (~ 1 см), которыми мы здесь интересоваться не будем.

Только от них может зависеть скорость волны c . Как составить из них комбинацию с размерностью скорости? Поскольку $[c]=\text{м/с}$, а масса входит только в $[\rho]$, плотность ρ нужно исключить. Из оставшихся величин g и T годится единственная комбинация: $[c]=[gT]$ (безразлично, о какой скорости — фазовой или групповой — идет речь).

Это позволяет нам утверждать, что c и v пропорциональны gT . Коэффициент пропорциональности методом размерностей не определить; из более детальной теории следует, что для фазовой скорости он равен $1/2\pi$:

$$c = \frac{gT}{2\pi}. \quad (3)$$

По определению $c=\lambda/T$, и из формулы (3) получается связь между длиной и периодом волны —

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi}.$$

Это соотношение называют дисперсионным уравнением. Можно записать и еще одно выражение для c :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

А какова групповая скорость? Выше мы получили соотношение $v = c^2 \frac{\Delta T}{\Delta \lambda}$ (см. (2)). Теперь, воспользовавшись дисперсионным уравнением, найдем отношение $\frac{\Delta T}{\Delta \lambda}$:

$$\Delta \lambda = \frac{g}{\pi} T \cdot \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta \lambda} = \frac{\pi}{gT}.$$

Подставив это в формулу для v , с учетом (3) получим:

$$v = c^2 \frac{\Delta T}{\Delta \lambda} = \frac{gT}{4\pi} = \frac{1}{2} c. \quad (4)$$

Итак, для волн на глубокой воде групповая скорость равна половине фазовой, причем обе они зависят от периода волны, т. е. волна обладает дисперсией.

Запишем расчетные выражения, связывающие длину и скорость распространения волны с ее периодом:

$$\lambda = 1,56T^2, \quad v = \frac{1}{2} c \approx 0,78T$$

(T берется в секундах, λ — в метрах, а скорости — в метрах/секунду).

Чтобы представить себе, что бывает

на самом деле, приведем небольшую таблицу:

$T, \text{ с}$	0,5	1	5	15	20	50
$\lambda, \text{ м}$	0,39	1,56	39	156	620	3900
$v, \text{ м/с}$	0,39	0,78	3,9	7,8	15,1	39

Как видно из таблицы, сравнительно короткие волны движутся со скоростью пешехода, а длинные могут обогнать автомобиль.

Взяв еще больший период, скажем $T \approx 1$ ч, и соответственно длину волны $\lambda \approx 20000$ км, мы получили бы фантастическую скорость $v \approx 10000$ км/ч. Однако для столь длинных волн гораздо раньше окажется, что волна будет «доставать» дно даже в самом глубоком месте океана, и наши простые формулы перестанут быть применимыми. Неприменимы они и для очень коротких волн, длиной меньше нескольких сантиметров — здесь сказывается влияние сил поверхностного натяжения. И все-таки эти формулы годятся для описания волн в очень широком диапазоне длин — от десятка сантиметров до десятка и более километров.

Хотя волна образуется движением частиц воды, сами эти частицы вовсе не движутся вместе с волной. В этом легко убедиться, взглянув на поплавок: он остается на месте, совершая лишь небольшие колебательные движения. Чтобы представить, как в процессе распространения синусоидальной волны движутся частицы воды, удобно встать на точку зрения наблюдателя, движущегося со скоростью, равной фазовой скорости волны. Для такого наблюдателя «гофрированная» поверхность воды остановится, застынет, но зато вся масса воды будет «течь» в обратную сторону со скоростью c . Частицы воды на поверхности скользят по волнистому рельефу точно так же, как это делал бы любой шарик, пущенный по нему с некоторой начальной скоростью. Взобравшись на вершину рельефа, такой шарик (и частица воды) будет иметь скорость, несколько меньшую средней скорости c , а скатившись к подошве — несколько большую c . В неподвижной

системе отсчета, в которой волновой профиль бежит с фазовой скоростью, движение отдельной частицы будет складываться из этих торможений и ускорений как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении. Результат такого сложения — движение по окружности, радиус которой равен амплитуде волны (рисунок 4).



Рис. 4.

Частицы, лежащие под поверхностью, тоже описывают окружности, но с меньшими радиусами. Амплитуды колебаний частиц уменьшаются с глубиной по экспоненте, пропорционально $e^{-2\pi z/\lambda}$, где z — глубина. Это означает, что на глубине, равной длине волны, амплитуда волновых движений в $e^{2\pi} \approx 535$ раз меньше, чем на поверхности. Поэтому даже сильные штормы практически не возмущают толщу океана на глубинах больше, скажем, сотни метров, и если λ меньше $2\pi H$, где H — глубина водоема, то его действительно можно считать бесконечно глубоким — волны «не задевают» дна.

Конечно, в реальном морском волнении волны обычно не синусоидальны, они состоят из многих синусоид, и движение частиц воды сложнее — оно тоже как бы состоит из многих окружностей различных радиусов, вращение по которым происходит с разной скоростью; но в достаточно слабых волнах это движение остается ограниченным и примерно симметричным (вверх — вниз). Но более сильная волна, даже строго периодическая, не будет синусоидой — ее вершины острее, чем подножия (рисунок 5). А если волна станет еще круче, на ее вершине появится «излом» с углом примерно 120° , а затем произойдет «обруши-



Рис. 5.

вание» — на вершине возникнет пенный «барашек». Вы, наверное, видели такие барашки на море, озере, реке; при сильном ветре они покрывают значительную часть водной поверхности.

Ветровые волны

В конце прошлого века замечательный английский физик Релей заметил: «Основным законом морского волнения является отсутствие какого-либо закона». Правда, уже давно была разработана описательная классификация состояния морской поверхности, необходимая для моряков. Как известно, сила ветра характеризуется 12-балльной шкалой Бофорта, а высота волн — 9-балльной шкалой волнения. Выдержки из этих шкал приведены на с. 16—17. Как видите, они во многом основаны на словесном описании обстановки. Эта классификация немного напоминает пушкинскую «Сказку о рыбаке и рыбке». Помните, сначала старик «видит, море слегка разыгралось»; потом «помутилось синее море», затем «почернело синее море» и, наконец, «видит, на море черная буря: так и вздулись сердитые волны, так и ходят, так воем и воют»... Пожалуй, тут даже можно указать, сколько баллов волнения прибавляла каждый раз золотая рыбка!

В последнее время средства измерения морских волн значительно усовершенствовались. Кроме специальных волнографов — приборов, записывающих колебания поверхности моря в данной точке, все большее значение приобретают дистанционные методы. Уже простое фотографирование поверхности с судна, самолета дает массу информации. Эффективна и радиолокация моря. Появилась и быстро развивается «спутниковая океанография». В результате многолетних наблюдений собраны обширные данные о морском волнении. Но получить ответ на вопросы о том, как именно ветер возбуждает волны на воде, как они развиваются дальше, совсем не легко, и полная ясность не достигнута по сей день, хотя основные механизмы известны.

Представьте себе гладкую водную поверхность. Вот подул ветер — появились волны. Почему? Прежде всего потому, что ветер — это не ровный,

регулярный поток воздуха, скользящий вдоль водной глади. В нем всегда есть случайные пульсации давления, которые действуют на воду, возмущая, искривляя ее поверхность. Если эти пульсации действуют «кто в лес, кто по дрова», беспорядочным образом, то в итоге никакой заметной волны, скорее всего, не возникнет. Иначе обстоит дело, если скорость ветра близка к фазовой скорости возбуждаемой им волны. Тогда возникает резонанс: поверхность колеблется в такт с воздушными пульсациями, и волна, распространяясь, непрерывно усиливается. По мере роста амплитуды волна сама начинает влиять на пульсации воздушного потока, усиливая их и усиливаясь под их действием еще больше, и этот взаимосвязанный рост идет еще быстрее, чем на начальном этапе. Такой «разгон» может происходить достаточно долго, и тогда волна достигает значительной высоты. Но в конце концов, даже если ветер не прекратится, этот процесс замедлится. В первых, вершины волн будут заостряться (как на рисунке 5) и затем обрушиваться, образуя барашки. Вторых, различные волны не существуют каждая сама по себе, а взаимодействуют, т. е. передают друг другу энергию, которая перераспределяется между ними сложным образом.

В результате всего этого и формируется картина реального ветрового волнения, состоящего из волн различных длин, амплитуд и направлений. И все же в этой картине преобладают волны, фазовая скорость которых близка к скорости ветра u , и значит, длина волны равна примерно $2\pi u^2/g$: чем сильнее ветер, тем больше характерная длина и, конечно, высота волн. Вообще, высота гладких волн не превышает $1/7$ их длины; более крутые гребни обрушиваются, образуя барашки. При слабом ветре существуют только короткие волны, но и то не всегда. Как уже упоминалось, для очень коротких волн необходимо учитывать влияние поверхностного натяжения. Это влияние сказывается в том, что фазовая скорость не убывает до нуля с уменьшением λ , а достигает минимума для волн с длиной $1,73$ см и снова растет с дальнейшим укорочением волны. Минимум фазовой скорости

составляет 23 см/с (для чистой, лишенной поверхностных пленок воды). Это и есть минимальная, пороговая скорость ветра, при которой могут появляться волны, причем волны короткие, «сантиметровые»; их легко заметить, наблюдая появление ряби в любой луже при кратковременных порывах ветра.

Нужно заметить, что нередко на спокойной морской поверхности все-таки появляются довольно правильные синусоидальные волны — зыбь. Это отголосок далекого шторма: в области шторма возникает сложное волнение, но вдаль убегают прежде всего длинные волны, которые имеют наибольшую групповую скорость и к тому же слабо затухают. Это и есть зыбь, распространяющаяся иногда на тысячи километров и вызывающая неприятную качку судна.

Море волн

Поистине в проблеме морских волн больше вопросов, чем ответов, и мы лишь довольно поверхностно коснулись ее. «Поверхностно» еще и потому, что, как мы видели выше, ветровые волны возмущают лишь тонкий, в десятки метров, верхний слой океана — ведь для глубоких его областей эти волны всегда короткие. Но есть и другие волны — приливы, цунами, — длина которых больше глубины самых глубоких мест океана. В таких волнах движение воды захватывает всю толщу океана, а сами они распространяются с наибольшей для данной глубины H скоростью $c=v=\sqrt{gH}$. Но и это не всё. В толще океана существуют «волны-тихоходы» — так называемые внутренние волны, бегущие со скоростями, не превышающими одного — двух метров в секунду, но зато достигающие огромной высоты в десятки, подчас сотни метров. Впрочем, что там метр в секунду! Имеются и такие волны — волны Россби, периоды которых достигают нескольких месяцев, а скорости составляют всего $1-2$ сантиметра в секунду; для таких волн определяющую роль играет вращение Земли. Эти и другие волны интересны для физиков, океанологов, метеорологов, и они заслуживают отдельного рассказа.

Задачи

M1056—M1060, Ф1068—Ф1072

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 ноября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1; «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1056» или «Ф1068». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике».

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

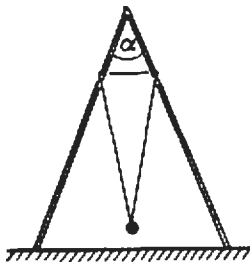


Рис. 1.

M1056. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

А. С. Меркурьев

M1057. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p . Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

Д. В. Фомин

M1058. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

Д. Г. Флакс

M1059. График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

А. В. Кляшник

M1060. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

А. Сердюков, Д. Г. Флакс

Ф1068. Снаряд, летящий по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали, упал через время T_1 после выстрела, два других упали одновременно через время T_2 ($T_1 < T_2$). Найти высоту H , на которой разорвался снаряд.

Ю. Г. Павленко

Ф1069. На угол величины α , согнутый из тонкого гладкого стержня, надета легкая петля длиной l с прикрепленным к ней небольшим грузом; угол установлен вертикально (рис. 1). Найдите расстояние от груза до вершины угла в положении равновесия и период малых колебаний груза в плоскости угла.

И. И. Мазин

Ф1070. Мальчик выдувает из длинной трубки мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом пузырь сдувается обратно в трубку и окончательно исчезает через время τ . За какое время сдуется таким же образом пузырь вдвое большего радиуса? Считать, что воздух движется по трубке до-

Задачник "Квант"

Загадки "Кванта"

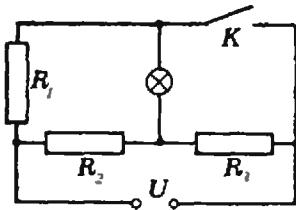


Рис. 2.

статочно медленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

Д. А. Куцков

F1071. В схеме, указанной на рисунке 2, лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K ; $R_1=R_3=90$ Ом, $R_2=180$ Ом, $U=54$ В. Найдите напряжение на лампочке.

В. И. Чивилёв

F1072. Почему наличие ультрафиолетового компонента в спектре ухудшает резкость изображения, получаемого на фотопленке?

Л. А. Ашкинази

Problems

M1056 — M1060, P1068 — P1072

M1056. In each little square of a 1987×1987 square table there is a number no greater than 1 in absolute value. In any 2×2 square of the table the sum of numbers is 0. Prove that the sum of all numbers in the table is no greater than 1987.

A. S. Merkuriev

M1057. Two players in turn write natural numbers on a board. The rules forbid writing numbers greater than p and divisors of previously written numbers. The player who has no move loses.

a) Determine which of the players has a winning strategy for $p=10$ and describe this strategy.

b) Determine which of the players has a winning strategy for $p=1000$.

D. V. Fomin

M1058. A non-empty set of points is chosen on an integer lattice. A finite family of vectors with integer coordinates is given. It is known that if the initial points of all the vectors are placed at any of the chosen points, more of the vectors' end points will be chosen points than not chosen ones. Prove that there are infinitely many chosen points.

D. G. Flaas

M1059. The graph of the function $y=f(x)$, defined on the entire numerical axis, is mapped into itself by the rotation about the origin by the angle $\pi/2$.

a) Prove that the equation $f(x)=x$ has exactly one solution.

b) Give an example of such a function.

A. Klyushin

M1060. Two closed polygonal lines, both with an odd number of sides, are drawn in the plane. All the straight lines containing the sides of these lines, differ, no three of them meet at one point. Prove that it is possible to choose one side in each of the lines so that the two chosen sides are opposite sides of a convex quadrilateral.

A. Serdyukov, D. G. Flaas

P1068. A cannonball shot vertically up explodes at the highest point of its trajectory into three equal parts. One of the parts, moving vertically, falls in time T_1 after the shot, the two others fall simultaneously in time T_2 ($T_1 < T_2$). Find the elevation H of the explosion point.

Yu. G. Pavlenko

P1069. The angle α obtained by bending a thin smooth rod has a light loop on it; the loop is of length l and has a small weight tied to it; the angle is placed vertically (figure Рис. 1, p. 23). Find the distance between the weight and the angle's vertex in the equilibrium position and the period of small oscillations of the weight in the angle's plane.

I. I. Mazin

P1070. A boy blows a soap bubble from a long straw. Having blown up the bubble to a certain size, he takes the straw out of his mouth and the bubble shrinks back into the straw,

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 1, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

finally disappearing in time τ . How long will a bubble of double radius take to disappear? Assume that the air in the straw moves slowly and the properties of the soap film of the two bubbles are the same.

D. A. Kuptsov

P1071. In the circuit shown on figure Рис. 2 the bulb burns with equal brightness when the switch K is turned on or off; $R_1=R_3=90$ Ohms, $R_2=180$ Ohms, $U=54$ V. Find the voltage on the bulb.

V. I. Chivilev

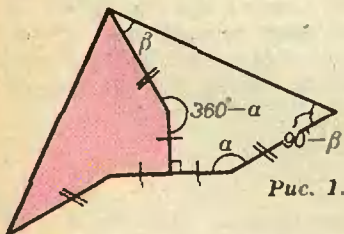
P1072. Why does the presence of the ultraviolet component in light spectrum decrease the sharpness of photographic images?

I. A. Ashkinazi

Решения задач

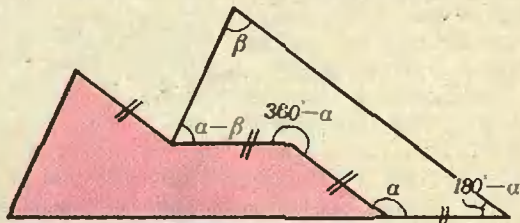
M1036—M1040, Ф1048—Ф1052

M1036. Существует ли такой (невыпуклый) пятиугольник, который можно разрезать на два равных пятиугольника?



Ответ: существует; примеры приведены на рисунке. Можно показать, что любой пятиугольник, удовлетворяющий условию, устроен как один из этих двух примеров — при соответствующих параметрах. (Любая, разбивающая пятиугольник, состоит из двух звень-

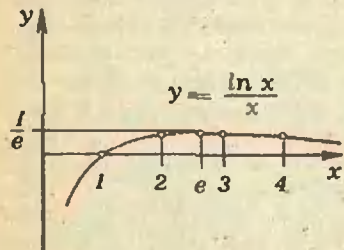
Рис. 2.



ев и соединяет его вершину с точкой на противоположной стороне; отсюда выводится, что углы пятиугольника равны α , $360^\circ - \alpha$ и либо 90° , β , $90^\circ - \beta$, либо β , $\alpha - \beta$, $180^\circ - \alpha$.)

С. М. Хосид

M1037. Найдите все решения в натуральных числах x, y уравнения $x^y - y^x = x + y$.



Ответ: $(x, y) = (2, 5)$.

Докажем, что других решений, кроме указанного, уравнение не имеет. Выясним сначала, когда левая часть уравнения положительна, т. е.

$$x^y > y^x \quad (1)$$

или $\ln x/x > \ln y/y$. Производная функции $\ln x/x$ равна $(1 - \ln x)/x^2$, поэтому эта функция возрастает на отрезке $[1; e]$ и убывает при $x \geq e$ (см. рисунок). Учитывая, что $2 < e < 3$ и $\ln 4/4 = \ln 2/2 < \ln 3/3$ (так как $2^3 < 3^2$), получаем, что (1) выполняется для следующих пар: $(x, 1)$ при $x > 1$, $(3, 2)$, $(2, y)$ при $y \geq 5$ и (x, y) при $3 \leq x < y$. Непосредственно проверяется, что пары $(x, 1)$ и $(3, 2)$ не удовлетворяют уравнению, а $(2, 5)$ — удовлетворяет. Пользуясь тем, что $2^y > y^2$ при $y \geq 5$, находим для пар вида $(2, y)$, где $y \geq 6$, что

$$\begin{aligned} x^y - y^x - x - y &= 2^y - y^2 - y - 2 > \\ &> 2(y-1)^2 - y^2 - y - 2 = y^2 - 5y > 0. \end{aligned}$$

Теперь остается доказать, что при $3 \leq x < y$ (т. е. $y \geq x+1$) уравнение не имеет решений. Фиксируем x , полагая $x = a \geq 3$, и рассмотрим функцию $f(y) = a^y - y^a$. Достаточно установить неравенства

$$f'(y) > 1 \quad \text{при } y \geq a+1 \quad (2)$$

и

Задачи "Квант"

Лемма

Если $f'(x) > g'(x)$ при $x \geq x_0$, то $f(x) > f(x_0) + g(x) - g(x_0)$ при $x > x_0$ (действительно, функция $f(x) - g(x)$ имеет положительную производную и, следовательно, строго возрастает при $x \geq x_0$).

$$f(a+1) > 2a+1; \tag{3}$$

тогда согласно лемме, приведенной на полях для функций $f(y)$ и $g(y) = y + a$ ($g'(y) = 1$), из (2) и (3) будет следовать, что при $y \geq a+1$

$$a^y - y^a = f(y) \geq f(a+1) + g(y) - g(a+1) > 2a+1 + y - (a+1) = a+y.$$

Оценим производную $f(y)$:

$$f'(y) = \ln a \cdot a^y - ay^{a-1} = (\ln a - 1)a^y + (a^y - y^a) + y^{a-1}(y-a) > y^{a-1}(y-a)$$

($\ln a \geq \ln 3 > 1$, $a^y - y^a > 0$ по доказанному выше). Из этой оценки сразу следует (2), поскольку $y^{a-1}(y-a) \geq (a+1)^{a-1}$ при $y \geq a+1$. Для доказательства (3) заметим, что $y^{a-1}(y-a)$ — это производная функции $g(y) = y^{a+1}/(a+1) - y^a$, и по лемме на полях (для $x = a+1$, $x_0 = a$)

$$f(a+1) > f(a) + g(a+1) - g(a) = -g(a) = -a^a + \frac{a^{a+1}}{a+1} = \frac{a^a}{a+1} = \left[a^{a-2} \left(1 - \frac{1}{a+1} \right) \right] a.$$

Функция в квадратных скобках, очевидно, возрастающая и при $a \geq 3$ не меньше $3(1-1/4) = 9/4$. Поэтому

$$f(a+1) > 2a + \frac{a}{4} \geq 2a + \frac{3}{4};$$

но числа $f(a+1)$ и $2a$ — целые, значит, $f(a+1) \geq 2a+1$, причем равенство здесь возможно только при $a=3$, но и в этом случае $f(4) = 3^4 - 4^3 = 81 - 64 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

А. И. Зайчик, В. Н. Дубровский



М1038. а) Докажите, что если произведение mn делится на 6 (где m и n — целые числа, большие 1), то прямоугольник из $m \times n$ клеток можно разрезать на уголки из трех клеток. При каких m и n это можно сделать так, чтобы при этом линии раздела не вырезали:

- б) ни одного прямоугольника 2×3 клетки;
- в) ни одного прямоугольника (меньшего $m \times n$)?

а) Достаточно рассмотреть два случая: $m=3k$, $n=2l$ и $m=6k$, $n=2l+1$, где $k \geq 1$, $l \geq 1$. В первом случае прямоугольник $m \times n$ можно разбить на $k \times l$ прямоугольников 3×2 , каждый из которых разрезается на два уголка (рис. 1, а). Во втором — отрезаем от прямоугольника $m \times n$ полоску $m \times 3$, которую можно разрезать на $3k$ прямоугольников 2×3 (рис. 1, б), а затем (при $l > 1$) разрезаем оставшийся прямоугольник $m \times (2l-2)$ так же, как в первом случае.

Вообще, прямоугольник $m \times n$ можно разрезать на уголки тогда и только тогда, когда одно из чисел m и n делится на 3, за исключением случая $3 \times (2l+1)$ (или $(2l+1) \times 3$). Действительно, очевидно, что mn — число клеток в прямоугольнике $m \times n$ — делится на 3, причем если одно из чисел m и n равно 3, то уголки неизбежно должны складываться в прямоугольники 3×2 (рис. 1, б), поэтому другое число должно быть четно. Обратное, пусть m делится на 3. Можно считать, что $m/3$ и n — нечетные числа, $m \geq 9$, $n \geq 5$ (остальные случаи рассмотрены выше), т. е. $m=9+6k$, $n=5+2l$, $k, l \geq 0$. Прямоугольник $m \times n$ разрезается на 3 прямоугольника: 9×5 , $9 \times 2l$ и $6k \times n$; разрезание первого из них на уголки показано на рисунке 2, два других разрезаются на прямоугольники 3×2 , как было показано выше.

б), в) В обеих задачах б) и в) ответ одинаков: «разрезания без прямоугольников» (будем называть их правильными) существуют лишь для прямоугольников $6k \times 2n$, где $k \geq 1$, $n \geq 3$, 6×4 и 3×2 .

Как мы уже видели в решении задачи а), одно из чисел m и n должно делиться на 3. Заметим далее, что при правильном разрезании уголок может примыкать к стороне прямоугольника $m \times n$, отличного от

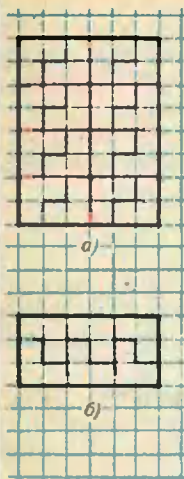


Рис. 1.

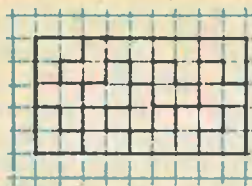


Рис. 2.

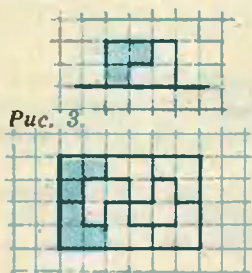


Рис. 3.

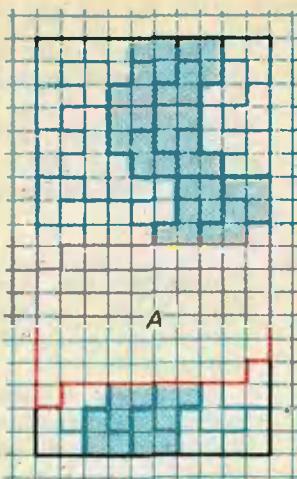


Рис. 4.

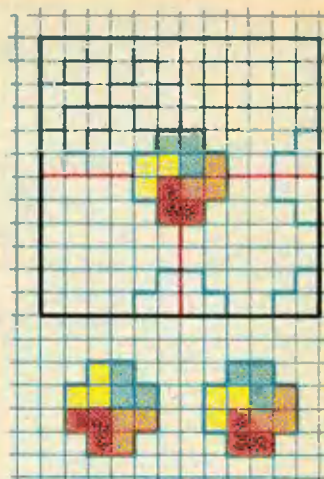


Рис. 5.

M1039. Точки A, B, C, D — вершины тетраэдра. Докажите, что

а) если $\vec{DA} \cdot \vec{BC} = \vec{DB} \cdot \vec{CA} = \vec{DC} \cdot \vec{AB}$, то все три эти скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.

а) Для любых четырех точек A, B, C, D справедливо тождество

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0. \quad (1)$$

Это становится очевидным, если представить его левую часть в виде $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, где $\vec{a} = \vec{DA}$, $\vec{b} = \vec{DB}$, $\vec{c} = \vec{DC}$. Из (1) сразу следует утверждение задачи.

б) Пусть угол между противоположными ребрами тетраэдра равен α , тогда углы между векторами \vec{DA} и \vec{BC} , \vec{DB} и \vec{CA} , \vec{DC} и \vec{AB} равны α или $180^\circ - \alpha$. Поэтому (1) можно переписать так:

$$\cos \alpha (\pm \vec{DA} \cdot \vec{BC} \pm \vec{DB} \cdot \vec{CA} \pm \vec{DC} \cdot \vec{AB}) = 0.$$

Покажем, что выражение в скобках не может равняться нулю, т. е. $\cos \alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$. Для этого достаточно доказать, что произведение длин любых двух противоположных ребер тетраэдра строго меньше суммы произведений длин двух других пар противоположных ребер, например

3×2 , только по двум клеткам — иначе образуется прямоугольник 3×2 (рис. 3). Следовательно, числа m и n должны быть четными.

Прямоугольник $6k \times 2$ правильно разрезать нельзя — очевидно, он обязательно распадется на прямоугольники 3×2 . Легко видеть также, что при попытке правильного разрезания прямоугольника $6k \times 4$ обязательно образуется прямоугольник 6×4 (начните с короткой стороны — рис. 4), поэтому при $k > 1$ правильное разрезание здесь также невозможно. Наконец, правильное разрезание прямоугольника $6k \times 2l$ при $k \geq 1$, $l \geq 3$ показано на рисунке 5, где нужно взять $k-1$ «блоков» A по вертикали, а по горизонтали — по $l-3$ голубых «блока» в ряду.

Существуют и другие замощения прямоугольников уголками. Например, переставляя уголки внутри «крестов», можно получать симметричные правильные разрезания из разрезов на прямоугольники (см. рис. 6 для случая $6k \times 6l$). Можно показать, что любой прямоугольник, допускающий правильное разрезание, допускает и симметричное правильное разрезание.

М. Хованов

$$DA \cdot BC < DB \cdot CA + DC \cdot AB. \quad (2)$$

Проведем через точки A , B и C произвольную сферу. Пусть она пересекает ребра DA , DB и DC в точках A_1 , B_1 , C_1 . Легко видеть, что треугольники ABD и B_1A_1D подобны, и следовательно, $A_1B_1 = AB \cdot (DB_1/DA)$. Аналогично, $B_1C_1 = BC \cdot (DB_1/DC)$. Деля почленно первое из этих равенств на второе, получим, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB \cdot DC}{DA \cdot BC}.$$

Таким образом, стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра, и (2) следует из неравенства треугольника для $A_1B_1C_1$.

Тетраэдры, о которых идет речь в этой задаче, называются *ортоцентрическими*, так как их высоты пересекаются в одной точке (что, вообще говоря, не имеет места).

В. Э. Матизен

М1040*. Числа $1, 2, \dots, 3n$ произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать по одному числу из каждой группы так, чтобы одно из них равнялось сумме двух других.

Обозначим эти три группы буквами A , B , C и предположим, что числа от 1 до $k-1$ попали в группу A , а число k — в группу B . Тройку чисел назовем хорошей, если они все из разных групп и сумма двух из них равна третьему. Допустим, что хороших троек нет, и покажем, что тогда для всякого a из группы C число $a-1$ принадлежит A . Отсюда будет следовать, что в A чисел больше, чем в C , что противоречит условию.

Пусть a — число из C . Тогда $a-1$ не принадлежит B , иначе тройка $(1, a-1, a)$ была бы хорошей. Допустим, что $a-1$ принадлежит C . Рассмотрим число $a-k$. Если оно входит в A , то $(a-k, k, a)$ — хорошая тройка, если в B , то $(k-1, a-k, a-1)$ — хорошая тройка. Следовательно, $a-k$ входит в C . Аналогично, если число $a-k-1$ входит в A , то хорошей тройкой будет $(a-k-1, k, a-1)$, а если в B — то $(1, a-k-1, a-k)$. Повторяя это рассуждение, приходим к выводу, что все натуральные числа вида $a-ik$, $a-ik-1$ ($i=0, 1, 2, \dots$) принадлежат C . Но при некотором i число $a-ik$ совпадает с одним из чисел $1, 2, \dots, k$ и, значит, входит в A или в B . Это противоречие доказывает, что $a-1$ принадлежит A . Следовательно, если C состоит из чисел c_1, \dots, c_n , то A содержит числа c_1-1, \dots, c_n-1 , причем все они больше 1 , так как 2 принадлежит A или B . Но A содержит и 1 , поэтому в A по крайней мере $n+1$ число.

В. Е. Алексеев

Ф1048. Киномеханик по ошибке вставил киноленту так, что все события на экране «потекли в обратном направлении», при этом автомобили поехали назад. Как изменились скорость и ускорение автомобиля в результате такой ошибки?

Пусть, когда лента вставлена правильно, автомобиль имеет скорость \vec{v} . Тогда его перемещение за малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ есть

$$\vec{\Delta x} = \vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1) = \vec{v} \cdot \Delta t.$$

Если же лента вставлена так, что события на экране «потекли в обратном направлении», перемещение автомобиля за это же время Δt будет

$$\vec{\Delta x}' = \vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_2) = -\vec{\Delta x}.$$

Но $\vec{\Delta x}' = \vec{v}' \cdot \Delta t$, так что

$$\vec{v}' \cdot \Delta t = -\vec{\Delta x} = -\vec{v} \cdot \Delta t,$$

и кажущаяся скорость автомобиля на экране —

$$\vec{v}' = -\vec{v}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \Delta v' &= \vec{v}'(t_1) - \vec{v}'(t_2) = \\ &= -\vec{v}(t_1) - (-\vec{v}(t_2)) = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \Delta v, \end{aligned}$$

и так как $\Delta v = \vec{a} \cdot \Delta t$, а $\Delta v' = \vec{a}' \cdot \Delta t$,

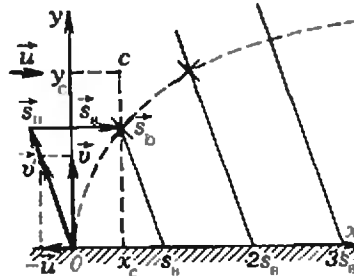
$$\vec{a}' = \vec{a}.$$

Следовательно, когда лента вставлена «задом наперед», скорость автомобиля на экране меняет направление, а ускорение остается неизменным.

А. С. Бугров

Ф1049. Деревянный плот оттолкнули от берега реки так, что в начальный момент его скорость была равной v и направлена перпендикулярно берегу. Траектория плота показана на рисунке. Красный крестик на траектории — место, в котором плот находился через время T после начала движения. Считая скорость реки постоянной и равной \vec{u} , найти графически точки траектории, в которых плот находился в моменты времени $2T$, $3T$, $4T$.

Рассмотрим движение плота в системе отсчета, связанной с водой, т. е. движущейся со скоростью \vec{u} . В этой системе плот имеет начальную скорость $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ и движется по прямой. При этом скорость плота \vec{v}' уменьшается из-за действия на него силы сопротивления воды. (Если бы сопротивление отсутствовало, то через время T плот оказался бы в точке c с координатами



$x_c = uT$, $y_c = vT$.) Перемещение плота относительно берега за время T складывается из его перемещения $\vec{s}_n = \vec{v}'T$ относительно воды и перемещения воды $\vec{s}_w = \vec{u}T$ (см. рисунок). За время $2T$ перемещение воды будет вдвое большим. Отложим от точки O вдоль оси x отрезок длиной $2s_w$ и проведем через точку c с координатой $2s_w$ прямую, параллельную \vec{s}_n . Эта прямая пересекает траекторию плота в точке, отмеченной синим крестиком, — в этой точке будет находиться плот через время $2T$ после начала движения.

Аналогичным построением находятся точки, в которых плот будет через время $3T$, $4T$ и т. д.

И. Ю. Потеряйко

Ф1050. Небольшая частица массой m , несущая положительный заряд q , с очень большого расстояния приближается к конденсатору по направлению, перпендикулярному его пластинам, и пролетает сквозь конденсатор через небольшие отверстия в серединах пластин. Считая, что на большом расстоянии от конденсатора скорость частицы равна v ,

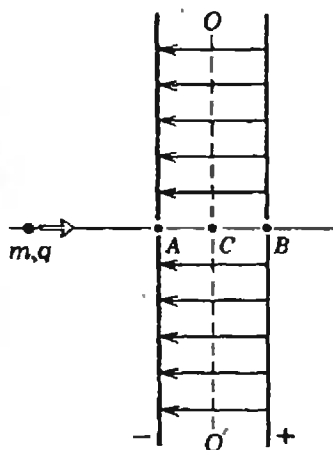
Если конденсатор отключен от источника тока, то система «частица + конденсатор» является замкнутой и ее полная энергия сохраняется. Внешнее электрическое поле конденсатора совершает работу над частицей, и эта работа идет на увеличение ее кинетической энергии: $\Delta K = A$. Следовательно

$$\Delta K_A = K_A - \frac{mv^2}{2} = A_A, \quad \Delta K_B = K_B - \frac{mv^2}{2} = A_B,$$

где A_A и A_B — работа электрического поля по перемещению частицы из бесконечности в точки A и B соответственно, K_A и K_B — кинетическая энергия частицы в этих точках. По определению потенциала мы можем записать:

Задача "Квант"

найти ее скорость: 1) в точке A внутри конденсатора (см. рисунок); 2) в точке B сразу после вылета из конденсатора. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U , расстояние между его пластинами много меньше размеров пластин; заряд конденсатора много больше q .



$$A_A = q(\varphi_\infty - \varphi_A), \quad A_B = q(\varphi_\infty - \varphi_B).$$

Потенциал φ_∞ на большом удалении от конденсатора, как это обычно делается, положим равным нулю. Найдем потенциалы φ_A и φ_B .

Так как заряд частицы q много меньше заряда конденсатора, можно считать, что частица практически не меняет поле внутри конденсатора. Поле внутри конденсатора однородно и его напряженность $E = U/d$, где d — расстояние между пластинами. Так как отрицательно и положительно заряженные пластины равноудалены от средней линии OO' внутри конденсатора, потенциал $\varphi_{OO'}$ на этой линии будет равен нулю. Поскольку поле однородно, для точек A, B и C можем записать:

$$\varphi_A - \varphi_C = -E \frac{d}{2}, \quad \varphi_B - \varphi_C = E \frac{d}{2}.$$

Но $\varphi_C = 0$, и следовательно,

$$\varphi_A = -\frac{Ed}{2} = -\frac{U}{2}, \quad \varphi_B = \frac{U}{2}.$$

Отсюда находим A_A и A_B :

$$A_A = -q\varphi_A = \frac{qU}{2}, \quad A_B = -q\varphi_B = -\frac{qU}{2}.$$

Таким образом,

$$\Delta K_A = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{qU}{2},$$

$$\Delta K_B = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{qU}{2},$$

Отсюда находим:

$$v_A = \sqrt{v^2 + \frac{qU}{m}}, \quad v_B = \sqrt{v^2 - \frac{qU}{m}}.$$

Видно, что если $v^2 < \frac{qU}{m}$, то частица вообще не пролетит через конденсатор.

Г. В. Григорьев

Ф1051. В магнитном поле, индукция которого горизонтальна и равна B , катится без проскальзывания со скоростью v тонкое металлическое кольцо, в котором имеется очень маленький разрыв длиной l ; вектор \vec{v} перпендикулярен плоскости кольца (рис. 1). Найти ЭДС индукции в момент, когда угол AOC (см. рисунок) равен α .

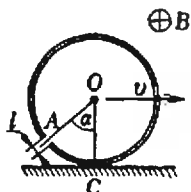


Рис. 1.

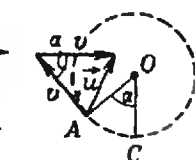


Рис. 2.

Прямой путь нахождения ЭДС предполагает разбиение кольца на малые (почти прямолинейные) участки и суммирование всех элементарных ЭДС. Мы поступим иначе. Если мысленно дополнить кольцо до целого, то ЭДС в нем будет равна нулю (контур замкнут). С другой стороны,

$$0 = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}',$$

где \mathcal{E}_0 — искомая разность потенциалов, \mathcal{E}' — ЭДС индукции дополненного элемента. Следовательно,

$$\mathcal{E}_0 = -\mathcal{E}' = -uBl \sin \varphi,$$

где u — скорость элемента, l — его длина, φ — угол, который составляет вектор \vec{u} с \vec{B} . Как видно из рисунка 2,

$$u = 2v \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_0 = -2Blv \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = -Blv \sin \alpha$$

— ЭДС меняется по синусоидальному закону.

Л. Г. Маркович

Ф1052. Известно, что освещенность, создаваемая на земле лунным диском в полнолуние, примерно в 10 раз больше, чем освещенность от «ущербной» луны в половину лунного диска. Как это объяснить?

Многokратное уменьшение освещенности в половинной фазе Луны (а не двойное, как представляется естественным) — экспериментальный факт. Попробуем понять, хотя бы в общих чертах, какие явления могут за ним стоять.

Обычно эти явления объясняют так. В половинной фазе свет Солнца падает по касательной на ту часть Луны, которая в основном «светит» на Землю. При этом тени от лунных гор экранируют большую часть поверхности Луны от прямого солнечного света, в целом Луна оказывается освещенной хуже, и на Землю она посылает меньше света. Однако в этом случае полукруглый край Луны должен казаться ярче остальной части «полудиска». Казалось бы, более полное решение должно учитывать то, что горы экранируют не только Луну от Солнца, но и Землю от отраженного Лунной света. В этом случае на всех краях «полудиска» освещенность должна уменьшаться. Кроме того, из подобного объяснения следует, что в полнолуние край диска должен быть еще темнее, ибо на краю будет двойное экранирование — поверхности Луны от Солнца и Земли от Луны.

На самом деле в полнолуние край диска имеет примерно такую же яркость, как центр. Это означает, что поверхность Луны должна отражать значительную долю света навстречу падающему свету, а не равномерно во все стороны, как, скажем, белая бумага. Таким образом, оптические свойства поверхности Луны довольно сложны, и конкретная величина ослабления освещенности зависит от рельефа. Например, при острых и часто расположенных горах поверхность будет выглядеть черной.

Заметим, что при частичном лунном затмении половина диска Луны также создает на Земле освещенность меньшую, чем половина максимальной. Но причина этого явления иная — наличие полутени.

Л. А. Ашкинази

Загадки „Кванта“

Маятник в магнитном поле и принцип суперпозиции

В мартовском выпуске «Задачника Кванта» была опубликована задача Ф1046. Напомним ее условие: «Маленький шарик массой m , имеющий заряд q , подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Этот математический маятник помещен в сильное однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена вертикально. За какое время плоскость качаний маятника повернется на угол 2π ? Явления, связанные с вращением Земли, не учитывать». Эта, казалось бы, искусственная задача, имеет довольно наглядное и, с нашей точки зрения, красивое решение, основанное на идее сложения колебаний.

Начнем с качественной оценки влияния магнитного поля на колебания маятника. Движение шарика изображено на рисунке 1 (вид сверху). Будем считать, что заряд $q > 0$, а поле \vec{B}_0 направлено вверх. Отведем шарик из положения равновесия (т. O) в

точку A и отпустим. В отсутствие магнитного поля ($B_0 = 0$) шарик пришел бы в точку A' и продолжал бы дальше колебаться между точками A и A' . Но если $B_0 \neq 0$, то на шарик действует сила Лоренца \vec{F}_L , направление которой показано на рисунке. Она искривляет траекторию шарика, и в результате он приходит в точку B , потом в точку C и т. д. Траектория приобретает довольно замысловатый вид. Если сила Лоренца мала по сравнению с возвращающей силой, то в течение полупериода магнитное поле будет лишь слегка искривлять траекторию шарика. Тогда дви-

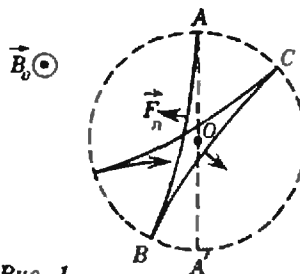


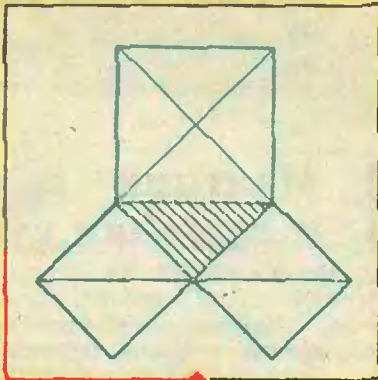
Рис. 1.

(Окончание см. на с. 34)

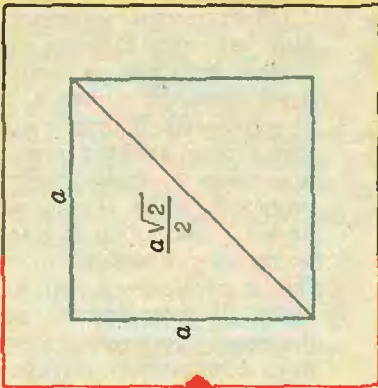
Замечательные числа

$\sqrt{2}$ и e

Еще задолго до Пифагора было известно, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на его катете. Об этом свидетельствуют рисунки, встречающиеся в письменных источниках более раннего периода.



Число $\sqrt{2}$ — отношение диагонали квадрата к его стороне — это первое число, иррациональность которого была доказана. Доказательство, полученное в школе Пифагора почти за 500 лет до н. э., внесло разлад в созданную в этой школе философскую систему, основанную на гармонии чисел.

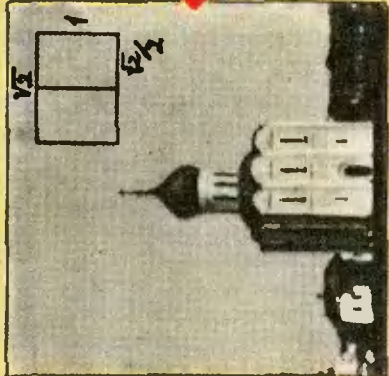


По преданию, первый, кто разгласил факт иррациональности $\sqrt{2}$, погиб при кораблекрушении. Такая же участь постигла и того, кто разгласил открытие пифагорейцами додекаэдра, первоначально не вписывавшегося в их систему чисел и фигур. Так в античные времена боги наказывали болтунов.



Число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828182845\dots$ появилось сравнительно недавно. Его часто называют «неперовым числом» в честь изобретателя логарифмов шотландского математика Джона Непера (1550—1617), однако нет твердых оснований для утверждения, что Непер имел о числе e четкое понятие.

Значение числа e для математического анализа стало ясно после того, как в 1647 году бельгийский математик Григорий из Сен-Винсента обнаружил связь логарифмов с площадью под гиперболой. В частности, он нашел, что криволинейные трапеции под гиперболой с основаниями $[1; e]$, $[e^2; e^3]$, ... имеют единичные площади.

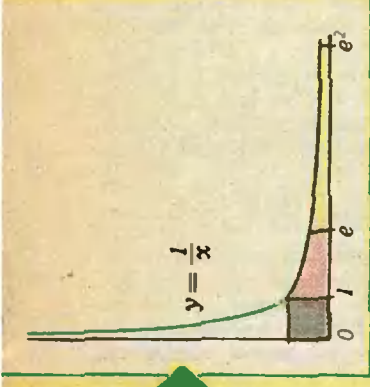


Головоломки

1. Слова «числа» и «силы» состоят из одинаковых букв. Расставьте эти буквы в пустых клетках квадрата так, чтобы в каждой строке и на каждой из двух диагоналей квадрата стояли все пять этих букв.

Н. К. Антонович

С	И	С	Л	А	
Ч		Л			
		А		Ч	



Прямоугольники с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$, часто встречаются в архитектуре, например в пропорциях церкви Покрова на-Нерли. Встречаются они и в книгопечатании, поскольку только такие прямоугольники переходят в подобные себе при складывании пополам.

Впервые обозначение e ввел Леонард Эйлер (1707—1783). Он также вычислил число e с 23 знаками, используя представление числа e в виде бесконечного числового ряда: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$ Даниилом Бернулли (1700—1782).



2. Замените буквы цифрами так, чтобы в каждой строке стояли квадраты натуральных чисел. Одни и те же буквы означают одинаковые цифры, разным — разные.

Л. П. Мочалов

Т	И	Р
И	В	А
Р	А	Б



Л. Эйлер получил замечательный результат, связывающий числа e , π и $i = \sqrt{-1}$: $e^{i\pi} = -1$. Ему принадлежит и заслуга определения функции $w = e^z$ для комплексных значений z , что положило начало математическому анализу в комплексной области — теории функций комплексного переменного.

Задача "Квант"

(Начало см. на с. 31)

жение шарика можно представить как колебания в вертикальной плоскости, которая сама медленно поворачивается — за один период колебаний маятника $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ она поворачивается на угол $\Delta\gamma = A\Omega C$. Малость силы Лоренца соответствует тому, что $\Delta\gamma \ll 1$.

Выполняется ли это условие на практике? Чтобы выяснить это, достаточно сравнить максимальную величину силы Лоренца $F_{L \max} = qv_{\max} B_0$ с максимальной величиной возвращающей силы F_g . При малых колебаниях маятника (рис. 2) $F_{g \max} = mg \sin \alpha \approx mg\alpha$ ($\alpha \ll 1$). Максимальную скорость можно найти из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{\max}^2 &= mgl(1 - \cos \alpha) = \\ &= mgl \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{\max} \approx \alpha \sqrt{gl}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{F_{L \max}}{F_{g \max}} \approx \frac{qB_0 v_{\max}}{mg\alpha} = \frac{qB_0}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Возьмем $l = 1$ м, $m = 1$ г, $B_0 = 3$ Тл (большие поля получить довольно трудно). Шарик радиусом $R = 1$ см можно зарядить до потенциала $\varphi = 3 \cdot 10^4$ В (после чего наступает электрический пробой воздуха). При этом $q = 4\pi \epsilon_0 R \varphi \approx 3 \cdot 10^{-6}$ Кл. Тогда $F_{L \max}/F_{g \max} \approx 3 \cdot 10^{-5}$. Условие малости силы Лоренца выполняется, как видим, с огромным запасом.

Для решения задачи нужно найти скорость поворота плоскости качаний маятника. Здесь не обойтись без анализа уравнений движения. Мы выведем их в приближении малых колебаний.

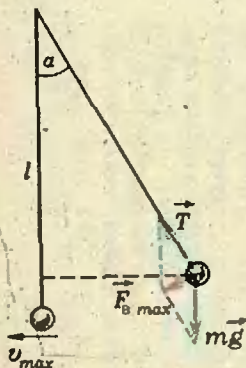


Рис. 2.

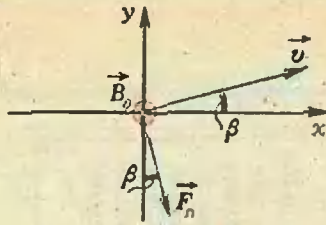


Рис. 3.

Введем систему координат, начало которой находится в точке подвеса, ось Z направлена вертикально вверх, а оси X и Y лежат в горизонтальной плоскости. Уравнение движения шарика имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{a}} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_L$$

При этом $\vec{a} = \dot{\vec{r}}(t)$, где $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор шарика, $|\vec{r}| = l$. Сила натяже-

ния нити $\vec{T} = -\frac{\vec{r}}{l} T$, где для малых колебаний $T \approx mg$. В этом случае шарик движется практически в горизонтальной плоскости, и можно легко найти силу Лоренца (рис. 3):

$$\begin{aligned} F_{Lx} &= |\vec{F}_L| \sin \beta = \\ &= q(v \sin \beta) B_0 = qv_x B_0, \\ F_{Ly} &= -|\vec{F}_L| \cos \beta = \\ &= -q(v \cos \beta) B_0 = -qv_y B_0, \\ F_{Lz} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в проекциях на оси X, Y уравнение движения имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{x}{l} T + qv_y B_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x'' = -\frac{g}{l} x + \frac{qB_0}{m} y', \\ m\ddot{y} &= -\frac{y}{l} T - qv_x B_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y'' = -\frac{g}{l} y - \frac{qB_0}{m} x'. \end{aligned}$$

Можно обозначить частоту колебаний маятника в отсутствие магнитного поля $\omega_0 =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ и циклотронную частоту (частоту вращения свободной заряженной частицы по круговой орбите в магнитном поле } \vec{B}_0) \omega_B = \frac{qB_0}{m}, \text{ и наши уравнения приобретут вид} \\ x'' &= -\omega_0^2 x + \omega_B y', \\ y'' &= -\omega_0^2 y - \omega_B x'. \end{aligned} \quad (1)$$

(Заметим, что условие малости силы Лоренца эквивалентно условию $\omega_B \ll \omega_0$, поскольку

$$\frac{F_{L \max}}{F_{g \max}} = \frac{qB_0}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\omega_B}{\omega_0}$$

Замечательным свойством уравнений движения нашего маятника является их линейность. Это значит, что если мы знаем два решения уравнений $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ и $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$, — то любая их линейная комбинация, т. е. выражения вида $x = Ax_1(t) + Bx_2(t)$, $y = Ay_1(t) + By_2(t)$, где A и B — некоторые произвольные постоянные, тоже является решением уравнений. (Для проверки достаточно подставить эти выражения в уравнения и учесть, что $(Ax_1(t) + Bx_2(t))' = Ax_1'(t) + Bx_2'(t)$ и т. д.) Заметим, что, если бы колебания были не малы, в уравнениях появились бы члены вида $(x')^2$ и другие — линейности уже не было бы.

Линейность хороша тем, что позволяет складывать решения уравнений. В результате часто удается описать сложное движение (такое, как на рисунке 1) как сумму нескольких простых.

Рассмотрим сначала случай $B_0 = 0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$\begin{aligned} x'' &= -\omega_0^2 x, \\ y'' &= -\omega_0^2 y. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти два уравнения «не связаны». Это значит, что x-компонента силы, действующей на шарик, зависит только от координаты x, а y-компонента силы — только от y. Поэтому движения по x и по y не зависят друг от друга, и уравнения (2) можно рассматривать по отдельности. Их решения, как известно, в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ y &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Эти формулы описывают любое возможное движение маятника. Выбирая надлежащим образом постоянные A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 , легко, например, выплест решения уравнений (2), описывающие колебания маятника в плоскости:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_0 \cos \omega_0 t, \\ y_1(t) &= 0; \\ x_2(t) &= X_0 \sin \omega_0 t, \\ y_2(t) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 0, \\ y_3(t) &= Y_0 \cos \omega_0 t; \\ x_4(t) &= 0, \\ y_4(t) &= Y_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Первые два решения описывают колебания в плоскости (XZ), а вторые два — в плоскости (YZ).

Линейность уравнений (2) позволяет по-разному комбинировать их решения. Напри-

мер, если $X_0 = Y_0 = A$, то, складывая законы движения плоских маятников, мы получим решение, описывающее конический маятник, вращающийся против часовой стрелки, если смотреть сверху:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x_2 = A \cos \omega_0 t, \\y &= y_1 + y_2 = A \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$

Можно описать и конический маятник, вращающийся по часовой стрелке:

$$\begin{aligned}x &= x_1 - x_2 = A \cos \omega_0 t, \\y &= y_1 - y_2 = -A \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$

И наоборот, складывая эти два решения для маятников, вращающихся в разные стороны, мы снова получаем колебания, лежащие в одной плоскости.

Теперь понятно, что конический маятник не случайно имеет тот же период, что и маятник, колеблющийся в плоскости. Это — следствие линейности уравнений движения!

Все сказанное выше — по существу, проявление в механике общего физического принципа: если физическая система описывается линейными уравнениями, то в ней действует принцип суперпозиции — сумма решений тоже является решением.

Рассмотрим теперь случай $V_0 \neq 0$. Решения (3), описывающие колебания маятника в одной плоскости, больше не удовлетворяют уравнениям (1). Однако им удовлетворяют круговые колебания! Действительно, закон движения $x = A \cos \omega t$, $y = A \sin \omega t$ удовлетворяет уравнениям при условии, что $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_B \omega$ (проверьте!). Решая это квадратное уравнение, находим:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= -\frac{\omega_B}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_B^2}{4}} \approx \\ &\approx -\frac{\omega_B}{2} \pm \omega_0\end{aligned}$$

(поскольку $\omega_B \ll \omega_0$). Таким образом, получается два решения: маятник, вращающийся против часовой стрелки с частотой $\omega_1 = \omega_0 - \omega_B/2$, и вращающийся по часовой стрелке с частотой $|\omega_2| = \omega_0 + \omega_B/2$.

Наличие магнитного поля приводит к тому, что конический маятник вращается в одну сторону с одной частотой, а в другую — с другой! Если $V_0 \rightarrow 0$, то $\omega_B \rightarrow 0$, и это отличие исчезает.

При $V_0 = 0$ сложение двух решений для маятников, вращающихся в разные стороны, дает колебания в одной плоскости. При $V_0 \neq 0$ получается сумма круговых колебаний со слегка различными частотами, своего рода «круговые биения»:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = \\ &= 2A \cos \omega_0 t \cdot \cos \frac{\omega_B}{2} t, \\ y &= A \sin \omega_1 t - A \sin \omega_2 t = \\ &= -2A \cos \omega_0 t \cdot \sin \frac{\omega_B}{2} t.\end{aligned}$$

Это — не что иное, как колебания маятника с частотой ω_0 в плоскости, которая сама медленно поворачивается с частотой $\omega_B/2$, т. е. как раз то, что нам нужно. Отсюда сразу получаем ответ: плоскость качаний маятника поворачивается с угловой скоростью $\omega_B/2 = qB_0/2m$ и повернется на угол 2π за время

$$\tau = \frac{4\pi}{|\omega_B|} = \frac{4\pi m}{|qB_0|}.$$

Поворот плоскости качаний маятника очень напоминает поведение маятника Фуко. Как мы только что выяснили, такое движение есть сумма вращений по и против часовой стрелки со слегка различными частотами. Можно ли применить эту идею к маятнику Фуко?

Представим себе для простоты, что маятник расположен на северном полюсе. Тогда наблюдатель, который не вращается вместе с Землей, а сохраняет постоянную ориентацию относительно звездного неба, обнаружит следующее. Если он отклоняет маятник и отпускает его без начальной скорости, то маятник колеблется в фиксированной плоскости с периодом $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Если он запускает маятник по кругу, тот вращается с частотой

имея возможности привести правильный рисунок, вносим уточнение в условие задачи: прибор находится в точке C такой, что $|AC| : |AB| : |BC| = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5$

той $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ независимо от направления вращения. Наблюдатель, стоящий на Земле и вращающийся вместе с ней, видит, что плоскость качаний маятника Фуко поворачивается по часовой стрелке (если смотреть сверху) со скоростью 1 оборот в сутки (визуально со звездным небом, относительно которого эта плоскость неподвижна). С точки зрения этого наблюдателя конические маятники по-прежнему совершают круговое движение, но их угловые скорости изменились: при вращении против часовой стрелки $\omega_1 = \omega_0 - \omega_B$, а по часовой стрелке — $\omega_2 = \omega_0 + \omega_B$, где $\omega_B = 2\pi/\text{сутки} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли. Складывая эти движения по формулам (4), получаем колебания в плоскости, поворачивающейся по часовой стрелке с угловой скоростью ω_B , как и должно быть.

Мы видим, таким образом, что движения заряженного маятника в магнитном поле и маятника Фуко чрезвычайно похожи. В обоих случаях плоскость качаний поворачивается, а вращение по и против часовой стрелки происходит с разной угловой скоростью. Физические причины такого поведения совершенно различны: для маятника в магнитном поле это сила Лоренца, а для маятника Фуко — то обстоятельство, что мы описываем его движение с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле и вращающегося с ней. Для него маятник Фуко движется так, как если бы на шарик, кроме силы тяжести и силы натяжения нити, действовала дополнительная сила, аналогичная силе Лоренца, которая была бы пропорциональна скорости и перпендикулярна ей. Эта сила называется силой Кориолиса и представляет собой частный случай сил инерции — дополнительных сил, которые надо учитывать при использовании неинерциальных (в том числе вращающихся) систем отсчета.

Д. А. Купцов, М. М. Цылин

П о п р а в к а

В июньском номере «Кванта» в разделе «Задачник «Кванта» на рисунке к задаче Ф1062 пропала точка C . Не

Участникам конкурса «Задачник «Кванта» сообщаем, что срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 октября.

Задачник «Кванта»

Сколько стоит дыня?



Однажды Ходжа Насреддин и его друг Али, отдав последние деньги в уплату за землю, на которой они выращивали дыни, поехали на бухарский базар продавать урожай. У Али было 104 дыни, у Насреддина - 17.

У городских ворот их остановили стражники и потребовали налог за ввоз дынь в Бухару.



Узнав величину налога и цену за дыню на бухарском базаре, Али отдал стражникам в уплату налога 19 дынь, переплатив при этом одну таньга.

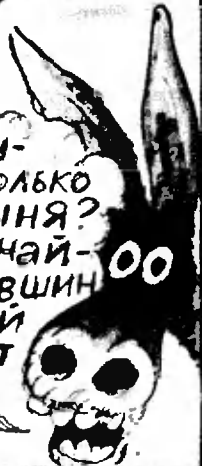
Я не стану платить тебе одну таньга, но освобождаю тебя от долга в одну таньга Али.



Получите с меня три дыни...

Стебя еще одна таньга

Достопочтеннейшие! Сколько же стоит дыня? Я бессилён найти ответ, кувшин моих мыслей показывает дно.



Дорогие читатели!

В будущем году, как и прежде, журнал «Квант» будет распространяться только по подписке. Если вы захотите стать нашими подписчиками, вы сможете оформить подписку в агентствах «Союзпечати», на почтамтах или в отделениях связи, начиная с любого номера (но не позднее первого числа предподписного месяца). Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Пусть A и B — две разные цифры, цифра A не равна нулю. Будем рассматривать числа, составленные из этих цифр. Покажите, что соотношение $\overline{AB \cdot AAA} = \overline{ABA \cdot AA}$ не выполняется ни при каких A и B , соотношение $\overline{AB \cdot AAA} = \overline{ABA \cdot AA} + 1$ выполняется лишь для одной пары чисел A и B , а соотношение $\overline{AB \cdot AAAA} = \overline{ABAB \cdot AA}$ выполняется всегда.

2. Попробуйте разложить все 28 косточек домино в четыре кучки так, чтобы суммы очков в кучках были четырьмя последовательными простыми числами.

3. Решите числовой ребус (см. рисунок). Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

4. Стрелку компаса укрепили на плоской пробке и опустили пробку в воду. Как будет вести себя пробка?

5. Подставьте вместо многоточий на рисунке цифры так, чтобы предложение оказалось верным.

Эти задачи нам предложили А. А. Азамов, А. М. Домашенко, А. Г. Гейн и Ф. Л. Толстов, С. С. Крогов, А. П. Савин.



СЛОВ, 0 + СЛОВ, 0 =
= ПЕСНЯ



«ЗДЕСЬ ПРИСУТСТВУЮТ»
ЦИФРЫ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
ПРИЧЕМ
ЦИФРА 0 — ... РАЗ
ЦИФРА 1 — ... РАЗ
ЦИФРА 2 — ... РАЗ
ЦИФРА 3 — ... РАЗ
ЦИФРА 4 — ... РАЗ
ЦИФРА 5 — ... РАЗ
ЦИФРА 6 — ... РАЗ
ЦИФРА 7 — ... РАЗ
ЦИФРА 8 — ... РАЗ
ЦИФРА 9 — ... РАЗ»



ЛУННЫЙ ТОРМОЗ

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Издавна люди считали, что морские приливы связаны с Луной. Луна притягивает воду Мирового океана, и в том месте океана, над которым находится Луна, образуется водяной «горб». Горб «стоит» под Луной, а Земля вращается вокруг своей оси; поднявшаяся вода «наползает» на берег — наступает прилив, вода отступает — отлив. Казалось бы, такое объяснение выглядит вполне естественно. Однако признать его удовлетворительным нельзя: из него следует, что приливы должны наблюдаться один раз в сутки, а в действительности они бывают каждые 12 часов, т. е. два раза в сутки.

Первую теорию приливов, объясняющую это явление, создал Ньютон вскоре после открытия закона всемирного тяготения. В океане действительно образуются два горба: один — у ближайшей к Луне поверхности воды, а другой — с противоположной стороны Земли (рисунок 1). Обсудим подробнее причину возникновения второго горба.

Мы привыкли говорить, что Луна вращается вокруг Земли. На самом же деле и Луна и Земля вращаются вокруг общего центра. Если бы этого вращения не было, то под действием силы притяжения Луна упала бы на Землю

(точнее, Земля и Луна упали бы друг на друга — ведь Луна тоже притягивает Землю). Как же происходит это вращение? Представим себе, что массы Земли и Луны одинаковы. Тогда они будут двигаться вокруг точки, которая лежит на середине отрезка, соединяющего их центры. Теперь давайте мысленно «наращивать» массу Земли. Тогда центр вращения будет смещаться в сторону Земли. Поскольку масса Земли гораздо больше массы Луны (в 81 раз), то центр вращения C оказывается лежащим внутри земного шара (но он обязательно смещен относительно центра Земли).

Это вращение существенно влияет на картину приливов. Вода отступает от центра вращения. (Нечто подобное происходит в стакане воды, когда, размешивая воду ложкой, вы приводите

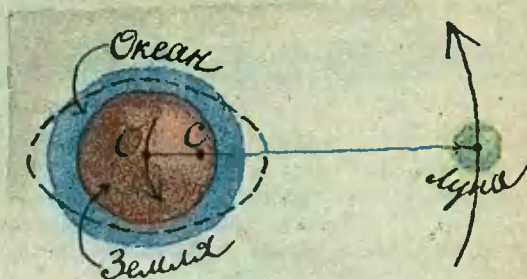


Рис. 1.

ее во вращение, — вода отходит от центра стакана и поднимается у края.) На дальней от Луны стороне Земли, где наименьшая сила притяжения, образуется водяной горб.

Конечно, приведенное нами объяснение приливов является весьма упрощенным. Мы не принимали во внимание неравномерность распределения воды по поверхности Земли, не учитывали влияния сил притяжения к Солнцу и других факторов, способных существенно изменить описанную картину. Однако ответ на главный вопрос мы получили: притяжение к Луне и вращение Земли вокруг общего с Луной центра S приводят к образованию двух приливных горбов в океане.

А теперь самое время объяснить принцип действия лунного тормоза. Оказывается, что водяные горбы находятся не на линии, соединяющей центры Земли и Луны (как для простоты показано на рисунке 1), а несколько смещены в сторону (рисунок 2). Происходит это по следующей причине. Земля, вращаясь вокруг своей оси, увлекает за собой и воду в океане (это происходит потому, что существует трение). В результате этого по мере поворота Земли в приливные горбы должны вовлекаться все новые и новые массы воды. Деформация, однако, всегда запаздывает по отношению к вызывающей ее силе (ведь сила создает ускорение, и должно пройти какое-то время, чтобы частицы приобрели скорость и сместились на заметные расстояния). Поэтому точка максимального поднятия воды (вершина горба) и точка на линии центров, где на воду действует максимальная сила притяжения к Луне, не совпадают. Образование горба происходит с некоторым запаздыванием, и он смещается в сторону вращения Земли. А в та-

ком случае, как видно из рисунка 2, сила притяжения Луны уже не проходит через центр собственного вращения Земли и как бы стремится «повернуть» ее в противоположную сторону, иными словами — тормозит ее вращение. Длительность суток každодневно увеличивается!

«Лунный тормоз» безотказно работает уже многие миллионы лет. У окаменевших кораллов, живших в океане около 400 миллионов лет назад, ученые обнаружили структуры, связанные с суточным и годичным ростом кораллов. Структуры эти называли суточными и годичными кольцами. Когда кольца подсчитали, то оказалось, что на каждый год приходится 395 суточных колец. Продолжительность года — времени, за которое Земля совершает полный оборот вокруг Солнца, — с тех пор, по-видимому, не изменилась. Значит, тогда — 400 миллионов лет назад — в сутках было только 22 часа!

Лунный тормоз продолжает работать и сейчас, увеличивая длительность суток. К чему это может привести в отдаленном будущем? В конце концов время обращения Земли вокруг своей оси может сравняться со временем обращения Луны вокруг Земли, и тогда торможение прекратится. Земля будет обращена к Луне всегда одной стороной, точно так же, как обращена к нам одной стороной Луна (попробуйте сами объяснить, почему это произошло). Длительность суток на Земле увеличится, и в результате может измениться климат. Земля будет долго оставаться обращенной к Солнцу одной стороной, а на другой стороне в это время будет господствовать долгая ночь. Горячий воздух с нагретой стороны с огромной скоростью устремится к холодной, на Земле задуют сильные ветры, поднимутся песчаные бури... Но такой прогноз может и не сбыться — ведь эти возможные времена столь далеки, что предсказать все изменения, которые произойдут в системе Земля—Луна—Солнце, просто невозможно. А если такая картина и окажется реальной, то люди обязательно придумают, как предотвратить бедствие.

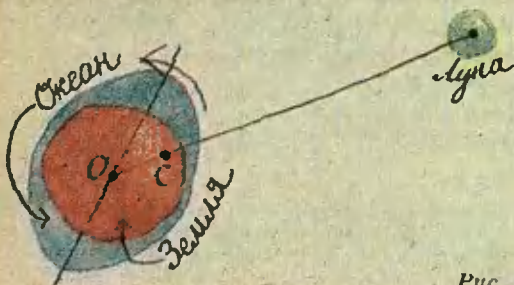
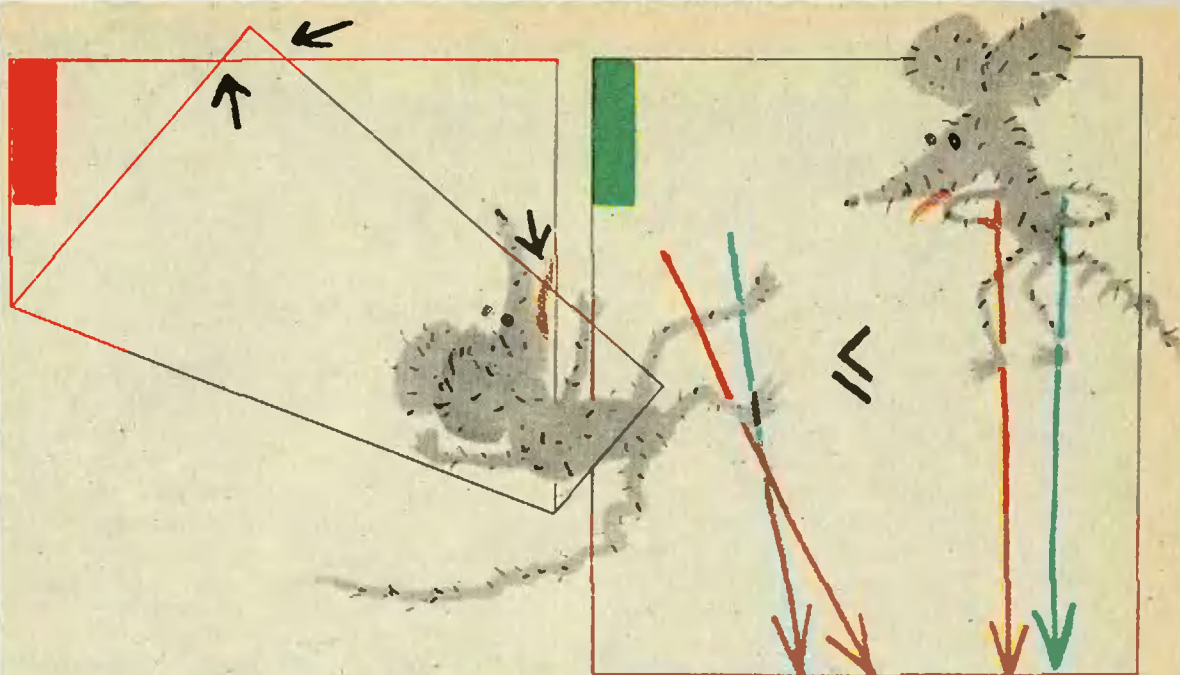


Рис. 2.



Школа «Кванте»

Математика 8, 9

Статья «Преобразования плоскости в задачах на построение» предназначена в первую очередь для восьмиклассников, а статья «Неравенство Коши — Буяковского» — для девятиклассников.

Преобразования плоскости в задачах на построение

В этой заметке мы расскажем об одном способе применения преобразований в задачах на построение — самом простом, но, пожалуй, и самом распространенном. Начнем с обсуждения двух задач из «Кванта» № 1 (с. 36).

Задача 1. Даны прямая и две окружности по разные стороны от нее. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на данной прямой, а концы другой диагонали — на данных окружностях.

Пусть вершины A и C искомого квадрата $ABCD$ лежат на данной прямой l , а вершины B и D на данных окружностях ω_1 и ω_2 (рис. 1; мы пред-

полагаем, что окружности ω_1 и ω_2 не симметричны относительно прямой l). Поскольку точки B и D должны быть симметричны относительно прямой l и $D \in \omega_1$, точка B должна лежать на окружности ω'_1 , симметричной окружности ω_1 относительно l . Построив окружность ω'_1 и найдя ее точки пересечения с ω_2 (их может быть две, одна или ни одной — и столько же решений имеет задача), получим возможные положения вершины B . После этого найти остальные вершины уже совсем легко.

Задача 2. Даны точка A , окружность и прямая. Постройте квадрат $ABCD$ такой, что на данной окружности лежит его вершина B , а на данной прямой — вершина C .

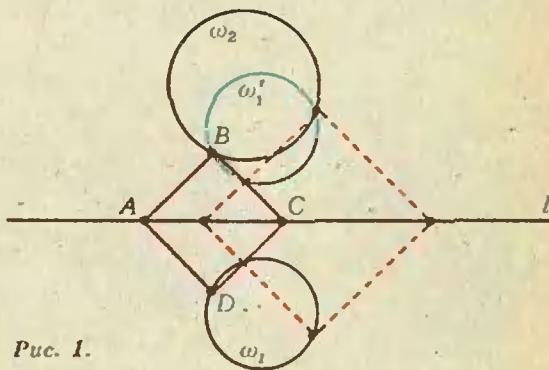


Рис. 1.

Здесь, как и в задаче 1, нужно догадаться, что вершина C получается из вершины B при вполне определенном преобразовании F плоскости; это преобразование состоит в последовательном выполнении поворота на 45° вокруг центра A ($\angle BAC = 45^\circ$) и гомотетии с коэффициентом $AC/AB = \sqrt{2}$ и центром A (порядок, в котором выполняются поворот и гомотетия, в данном случае роли не играет; говорят, что F — это композиция указанных поворота и гомотетии*). Таким образом, для решения задачи достаточно построить окружность $\omega' = F(\omega)$, т. е. образ данной окружности ω при преобразовании F , и взять в качестве вершины C любую из точек пересечения окружности ω' с данной прямой. Центр O' окружности ω' можно построить как вершину прямоугольного равнобедренного треугольника AOO' ($\angle AOO' = 90^\circ$), а радиус окружности ω' в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса окружности ω . Отметим, что поворот на 45° можно делать как по, так и против часовой стрелки; при этом получаются два преобразования F_1 и F_2 , которым отвечают две окружности ω' и ω'' , так что задача может иметь от 0 до 4 решений (рис. 2).

Обе эти задачи укладываются в следующую схему (рис. 3):

Заданы две фигуры M_1 и M_2 и некоторое преобразование плоскости F ; требуется найти на этих фигурах такие точки X (на M_1) и Y (на M_2), что при преобразовании F точка X переходит в точку Y .

Для решения надо построить фигуру $F(M_1)$, в которую переходит фигура M_1 при преобразовании F , и найти ее пересечение с фигурой M_2 ; тогда Y — это любая из точек пересечения фигур M_2 и $F(M_1)$, а $X = F^{-1}(Y)$, где F^{-1} — преобразование, обратное к F .

Конечно, преобразование F , а часто и фигуры M_1 и M_2 не задаются в явном виде. Их надо уметь «выудить» из условия — и здесь все уже зависит от искусства решающего. Чтобы нашим читателям было легче ориентироваться, приведем полный список, названия и обозначения всех преобразований подобия и, в частности,

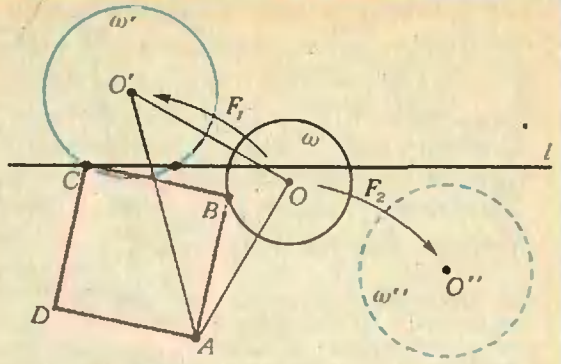


Рис. 2.

движений плоскости. (Некоторые из них не изучаются в школе, но являются композициями преобразований, известных из курса 7-го класса.)

Движения:

параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор \vec{a} ;

поворот R_O^α на угол α вокруг центра O ;

осевая симметрия S_l с осью l ;

скользящая симметрия $S_{l,\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ S_l$, где $l \parallel \vec{a}$, — композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси (\circ — знак композиции).

Преобразования подобия, не вошедшие в список движений: гомотетия H_O^k с центром O и коэффициентом k ;

поворотная гомотетия (по другой терминологии спиральное подобие) с центром O , углом α и коэффициентом k — это композиция $H_O^k \circ R_O^\alpha$ гомотетии и поворота с общим центром;

зеркальная гомотетия с центром O , осью l ($l \in O$) и коэффициентом k — это композиция $H_O^k \circ S_l$ гомотетии и симметрии относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

Для удобства некоторые преобразования мы включили в этот список фактически дважды (поворот, осевая симметрия и гомотетия являются частными случаями других преобразований — каких?), однако можно доказать, что здесь перечислены все возможные преобразования подобия плоскости.

По нашей схеме фигуры M_1 , M_2 и преобразование F в задаче 1 — это данные окружности и симметрия относительно данной прямой, а в задаче 2 — окружность, прямая и поворотная гомотетия $H_A^{\sqrt{2}} \circ R_A^{\pm 45^\circ}$.

Рассмотрим теперь две задачи, в ко-

* О композиции преобразований можно прочитать, например, в учебном пособии: *Геометрия 6–8* под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1980. — С. 191.

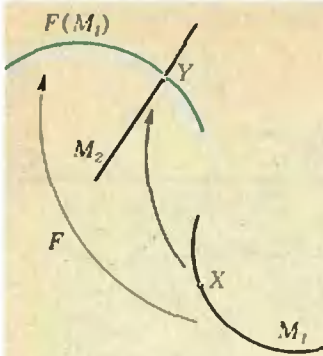


Рис. 3.

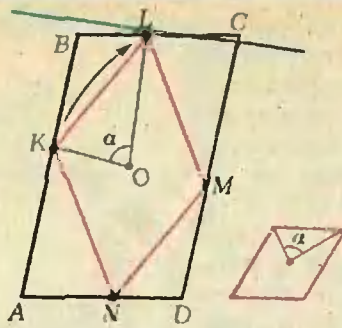


Рис. 4.

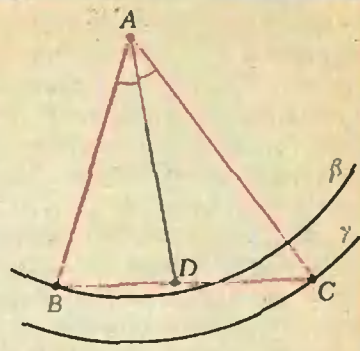


Рис. 5.

торых наша схема просматривается не столь явно.

Задача 3. Впишите параллелограмм, подобный данному, в другой данный параллелограмм так, чтобы на каждой стороне описанного параллелограмма лежала одна вершина вписанного.

Пусть $ABCD$ — данный описанный параллелограмм, а $KLMN$ — искомый вписанный (рис. 4). Их центры должны совпадать, поскольку при центральной симметрии относительно центра параллелограмма $KLMN$ параллелограмм $ABCD$ должен перейти в себя. Следовательно, центр O искомого параллелограмма нам известен; известны также $\angle KOL = \alpha$ и отношение $LO:KO = k$, поскольку задана форма параллелограмма $KLMN$. А это значит, что можно применить нашу схему, взяв за M_1 и M_2 прямые AB и BC , за F — поворотную гомотетию $H_D^k R_D^a$, а за X и Y — искомые точки K и L ($L = F(K)$). Дальнейшее в разъяснениях не нуждается. Отметим только, что в этой задаче интересно провести полное исследование.

Задача 4. Постройте треугольник ABC , если известны длина его биссектрисы AD и длины сторон AB и AC .

Построим отрезок AD и проведем окружности β и γ радиусов AB и AC с центром A (рис. 5). Это и будут множества M_1 и M_2 , а точки B и C — это точки X и Y в нашей схеме. Что же будет преобразованием F ? Согласно теореме о биссектрисе (см., например, «Квант» № 2 за 1985 г., с. 29) отношение $k = CD:DB$, в котором делится сторона CB основанием биссектрисы, равно отношению $AC:AB$ сторон треугольника, и следовательно, нам известно. А так как $C = H_D^{-k}(B)$,

в качестве F можно взять гомотетию H_D^{-k} , т. е. C — это точка пересечения окружностей γ и $H_D^{-k}(\beta)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте треугольник по биссектрисе и отрезкам, на которые основание биссектрисы делит сторону треугольника.

2. Постройте окружность с данным центром так, чтобы один из отрезков, соединяющих точки ее пересечения со сторонами данного угла, был параллелел данной прямой.

3. В два известных момента времени с корабля были измерены углы между направлениями на два маяка, отмеченные на карте. Направление и скорость движения корабля также известны. Как найти на карте положение корабля в эти моменты?

4. Постройте треугольник ABC по медианам AA_1 и BB_1 и углу C .

5. (для читателей, знакомых с инверсией). Впишите в данный параллелограмм ромб данной площади так, чтобы на каждой стороне параллелограмма лежала одна вершина ромба.

В. Н. Дубровский

Неравенство Коши — Буняковского

Неравенство Коши — Буняковского смело можно отнести к числу популярнейших в математике. Не раз появлялось оно и на страницах нашего журнала (см., например, «Квант», 1986, № 12, с. 31). Выглядит неравенство Коши — Буняковского так:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \quad (1)$$

Тем не менее мало где приводится его доказательство. Здесь мы дадим одно весьма простое доказательство неравенства Коши — Буняковского, обсудим его геометрический смысл и с его помощью еще раз решим одну задачу, предлагавшуюся в 1984 году

в «Кванте» (см. № 5, с. 37, Избранные школьные задачи, задача 15). Попутно мы обсудим вопрос о «точности» неравенства.

Итак, если хотя бы один из радикалов, например $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$, равен нулю, тогда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, левая часть в (1) также равна нулю и неравенство справедливо. Пусть оба корня положительны и пусть

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2},$$

$$B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

Перепишем неравенство (1) в виде

$$\frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|}{AB} \leq 1.$$

Воспользовавшись тем, что $|x + y| \leq |x| + |y|$ и $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, напишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|}{AB} &\leq \frac{|a_1 b_1|}{AB} + \\ &+ \frac{|a_2 b_2|}{AB} + \dots + \frac{|a_n b_n|}{AB} = \\ &= \frac{|a_1|}{A} \cdot \frac{|b_1|}{B} + \frac{|a_2|}{A} \cdot \frac{|b_2|}{B} + \dots \\ &\dots \frac{|a_n|}{A} \cdot \frac{|b_n|}{B} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_1}{A} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{B} \right)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_2}{A} \right)^2 + \left(\frac{b_2}{B} \right)^2 \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_n}{A} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{b_n}{B} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{B^2} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \right) = 1 \end{aligned}$$

— неравенство (1) доказано. Заметим, что мы доказали более сильное неравенство: $|a_1 b_1| + \dots + |a_n b_n| \leq AB$. Равенство в нем достигается при

$$\frac{|a_1|}{A} = \frac{|b_1|}{B}, \frac{|a_2|}{A} = \frac{|b_2|}{B}, \dots, \frac{|a_n|}{A} = \frac{|b_n|}{B},$$

т. е. при $\left| \frac{a_1}{b_1} \right| = \left| \frac{a_2}{b_2} \right| = \dots = \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ (если a_i, b_i отличны от нуля; если же некоторое $b_i = 0$, то и соответствующее $a_i = 0$). В (1) равенство достигается, когда к тому же произведения $a_1 b_1, \dots, a_n b_n$ одного знака, т. е. когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

При $n = 3$ неравенство Коши — Буныковского принимает вид

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \quad (1')$$

и нетрудно понять его геометрический смысл. Рассмотрим два вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда в левой части (1') записана абсолютная вели-

чина скалярного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} , а в правой части — произведение их длин $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. Но скалярное произведение векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними; поскольку $|\cos(\widehat{a, b})| \leq 1$, мы получаем неравенство (1').

В случае произвольного n неравенство Коши — Буныковского имеет тот же геометрический смысл в пространстве размерности n , где вектор, длина вектора и скалярное произведение векторов определяется аналогично тому, как это делается в трехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \vec{a} \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}; \\ \vec{a} \cos(\widehat{a, b}) &= \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \end{aligned}$$

Теперь возьмем «Квант», 1984, № 5 и посмотрим на задачу 15 из «Избранных школьных задач»:

а) Пусть $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$.

б) Пусть $a + b + c = 1$ и, кроме того, известно, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 1/2$.

Решение. а) По неравенству Коши — Буныковского

$$1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Отсюда $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Если $a = b = c = 1/3$, то $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1/3$. Это означает, что наше неравенство точное.

Вопрос о точности неравенства имеет большее значение. Поэтому мы дадим строгое определение.

Пусть неравенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq c$$

выполнено для всех допустимых значений x_1, x_2, \dots, x_n . Говорят, что константа c в правой части точная, если ее нельзя увеличить, т. е. не существует такого $k > c$, чтобы при всех допустимых значениях x_1, x_2, \dots, x_n выполнялось неравенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq k.$$

Аналогично про константу c в правой части неравенства

$$b(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c,$$

справедливого при всех допустимых x_1, x_2, \dots, x_n , говорят, что она точная, если ее нельзя уменьшить.

Вернемся к нашей задаче. Докажем б) в чуть более общей постановке: пусть a, b, c ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$) — длины векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ таких, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, и $a + b + c = 1$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 < 1/2$.

Возведем обе части векторного равенства $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ в скалярный квадрат. Получим

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} = 0,$$

где $\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha$, $\vec{b}\vec{c} = bc \cos \beta$, $\vec{a}\vec{c} = ac \cos \gamma$, α, β, γ — углы между соответствующими векторами.

Отсюда

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= -2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}) \leq \\ &\leq 2(|\vec{a}\vec{b}| + |\vec{b}\vec{c}| + |\vec{a}\vec{c}|) < \\ &< 2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2 - \\ &- (a^2 + b^2 + c^2) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

(подумайте, почему в нашем рассуждении появилось строгое неравенство).

Таким образом, $2(a^2 + b^2 + c^2) < 1$, $a^2 + b^2 + c^2 < 1/2$, что и требовалось.

Это неравенство также точное, т. е. нельзя взять константу $k < 1/2$, чтобы при этом неравенство $a^2 + b^2 + c^2 < k$ выполнялось для всех векторов, удовлетворяющих условию задачи. В са-

мом деле, пусть $k = 1/2 - \varepsilon$. Возьмем три коллинеарных вектора длиной $\varepsilon, 1/2 - \varepsilon, 1/2$ соответственно, причем векторы длиной ε и $1/2 - \varepsilon$ одного направления, а вектор длиной $1/2$ — противоположного. Они удовлетворяют условию задачи, но в то же время

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \\ &= \frac{1}{2} + 2\varepsilon^2 - \varepsilon > \frac{1}{2} - \varepsilon = k. \end{aligned}$$

Задача, которую мы обсуждали, допускает следующее естественное обобщение:

Докажите, что сумма квадратов сторон n -угольника периметра 1:

- не меньше $1/n$;
- меньше $1/2$;
- можно ли усилить утверждение пункта б)?

А. А. Коклюшков

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите все целые значения x , при которых выражение $\frac{7x+1}{3x+4}$ принимает целые значения.

2. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

3. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно составить треугольник.

4. Дан правильный пятиугольник P_1 , вписанный в окружность, и правильный пятиугольник P_2 , описанный вокруг этой окружности и касающийся ее в вершинах пятиугольника P_1 . Проведем через вершины пятиугольника P_1 перпендикуляры к его сторонам. Они составят правильный пятиугольник P_3 . Докажите, что если a_1, a_2, a_3 — стороны пятиугольников P_1, P_2, P_3 , то $a_3^2 = a_2^2 - a_1^2$.

5. Основания трапеции имеют длины 3 и 15. Может ли радиус окружности, вписанной в трапецию, иметь длину 4?

Девятый класс

6. Докажите, что уравнение $xy + yz + zx = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

7. Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , пересекающиеся в точке H . Докажите формулу для радиуса R описанной окружности:

$$R = \frac{1}{2} AH^2 \cdot \frac{A \cdot H}{B \cdot H \cdot C \cdot H}.$$

9. Точки C и D лежат на прямой, а точки A и B не лежат на ней. С помощью циркуля и линейки найдите на этой прямой точку M такую, что $\angle BMD = 2\angle AMC$.

10. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} \alpha_n = 1$. Найдите наибольшее возможное значение произведения $\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n$.

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$x_1^{x_2} = x_3, \quad x_2^{x_3} = x_4, \quad \dots$$

$$x_{n-2}^{x_{n-1}} = x_n, \quad x_{n-1}^{x_n} = x_1, \quad x_n^{x_1} = x_2.$$

12. Из квадрата $ABCD$ со стороной a вырезали четверть круга радиусом r с центром в точке C . Требуется из оставшейся части вырезать прямоугольник наибольшей площади, причем так, чтобы прямоугольник и квадрат имели общий угол A . Каковы размеры прямоугольника наибольшей площади?

13. Можно ли любой трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

14. Из точки O в пространстве выходят четыре луча так, что угол между любыми двумя лучами один и тот же. Найдите этот угол.

15. При каком натуральном n число $\frac{n^2}{(1.1)^n}$ будет наибольшим?

Задачи 2, 3, 6, 9—11, 13, 15 нам предложил Л. Д. Курляндчик, задачи 1, 5 — П. П. Горнуша, задачу 4 — Т. Н. Демина, задачу 8 — Ю. Н. Хохленко, задачи 7, 14 — В. А. Ясинский, задачу 12 — Э. Г. Готман.



Лаборатория „Кванта“ ●

Вихри... на патефоне

Кандидат физико-математических наук
Е. М. БУБНОВ

В настоящее время у физиков заметно повысился интерес к изучению вихревых движений жидкости и газа. И это не случайно. Уже давно известно, например, что именно вихревое движение циклонов и антициклонов в атмосфере определяет погоду на Земле.* (Теперь с аналогичной картиной столкнулись и океанологи.***) Оказалось, что океан, как и атмосфера, весь пронизан вихрями (самых разных размеров — от сантиметров до сотен километров), и если их не учесть, это приведет к неправильному пониманию многих важных явлений.

Чем же характеризуется вихревое движение? Главное — наличие вра-

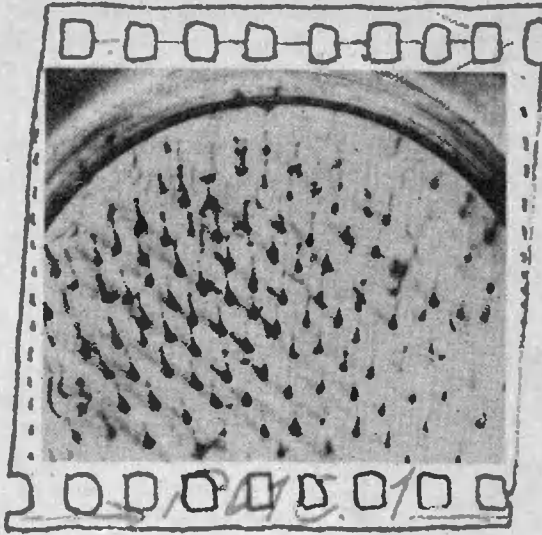
щательного движения относительно некоторого центра, который, в свою очередь, также может двигаться. Дополнительно к вращательному могут быть и другие виды движений, и в зависимости от этого вихри могут быть или плоскими (например, циклон часто можно рассматривать как плоский вихрь, так как его горизонтальные размеры много больше вертикальных), или такими, в которых вертикальные движения соизмеримы с горизонтальными (смерчи, тайфуны, «пыльные дьяволы» и т. п.).

Естественно, что существуют общие закономерности для вихревых движений, независимо от их размеров. Изучение этих закономерностей позволяет ответить на многие важные вопросы: в какую сторону будет двигаться тайфун? как изменится погода за счет взаимодействия двух циклонов? Попробуем рассмотреть некоторые особенности вихревых движений в простых «домашних» экспериментах.

Для проведения этих экспериментов требуется банка, в которую можно налить воду, и проигрыватель. Банка должна иметь вертикальные, желательно прозрачные, стенки, а проигрыватель — скорость вращения 33 об/мин. Наливаем в банку теплой воды и устанавливаем ее на проигры-

*) Об этом можно прочитать в статье Л. Алексеевой «Вихри, которые «делают погоду»» («Квант», 1977, № 8).

**) Об этом рассказывается в статье Л. М. Бреховских и В. М. Куртелова «Акустика в Океане» («Квант», 1987, № 3).



ватель. Включаем его и наблюдаем за движением жидкости в банке.

Сначала происходит постепенное раскручивание жидкости, а через несколько минут жидкость в банке разбивается на отдельные вихри — в системе устанавливается картина движений, изображенная на рисунке 1. Естественно, что в прозрачной воде увидеть эту картину нельзя, поэтому надо как-то сделать эти движения видимыми. Самое простое — аккуратно капнуть в воду чернил или зеленки, для более эффектной картины на поверхность жидкости можно насыпать мелкий краситель. Прежде чем изучать свойства этой вихревой системы, попробуем ответить на вопрос: почему в теплой воде, вращающейся с постоянной скоростью, образуются вихри?

Теплая жидкость, налитая в открытую банку, непрерывно испаряется. За счет испарения на поверхности жидкости непрерывно образуется тонкая холодная пленка, которая обладает большей плотностью, чем остальная жидкость. Эта холодная вода стремится опуститься вниз, причем в невращающейся жидкости такое опускание носит нерегулярный характер и пленка «стекает» отдельными струйками — «термиками». Таким образом в жидкости происходит непрерывное конвективное перемешивание*),

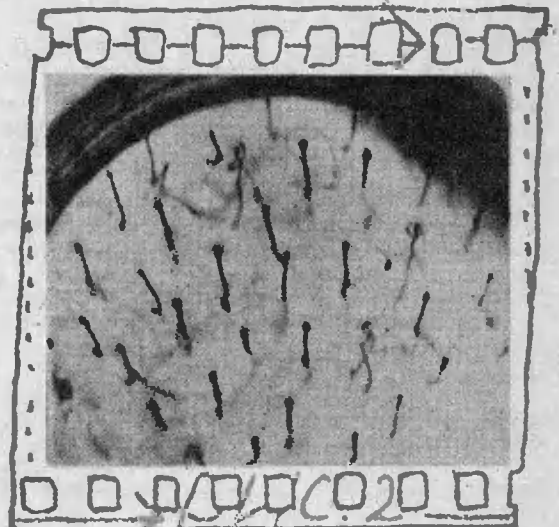
*) О конвекции (о ее возникновении и условиях существования) и о том, как благодаря конвекции неупорядоченные системы приходят в упорядоченное состояние, можно прочитать в статье Е. Е. Городецкого и В. С. Есипова «Конвекция и самоорганизующиеся системы» («Квант», 1985, № 9).

т. е. перемешивание, вызванное различием в плотности отдельных частей жидкости.

Если жидкость начать вращать, то нерегулярное конвективное движение упорядочивается и в системе образуется вихревая решетка. В общем случае вращение стремится запретить или ослабить движения, которые происходят в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и если жидкость вращается с очень большой скоростью, то движения в ней вообще не будет. Если скорость уменьшить, то образуется указанная выше структура, а при еще меньшей скорости эта структура разрушается и возникает нерегулярный вихревой режим.

Все эти эффекты можно наблюдать, и не меняя скорость вращения, но изменяя температуру воды и ее глубину. При скорости вращения 33 об/мин и глубине 3—4 см для воды с температурой 25—35 градусов наблюдается вихревая решетка, для воды с температурой 50 градусов она начинает разрушаться, причем переход от регулярной структуры к нерегулярной происходит через взаимодействие отдельных пар вихрей. В этом случае вихри сплетаются, образуя двойную спираль (похожую на спираль ДНК), которая со временем сжимается в один вихрь (рис. 2).

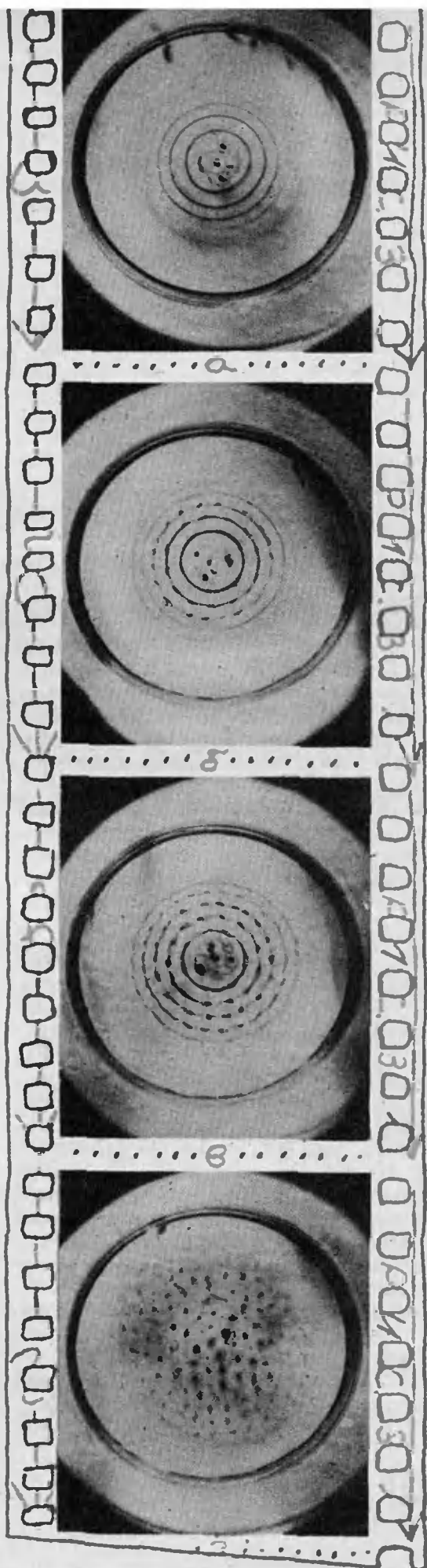
Если вы научились получать вихревую решетку, то можно перейти к более тонким экспериментам и рассмотреть этапы образования решетки. Вихри в системе образуются не сразу, а через некоторое время после начала вращения. Для наблюдения образова-

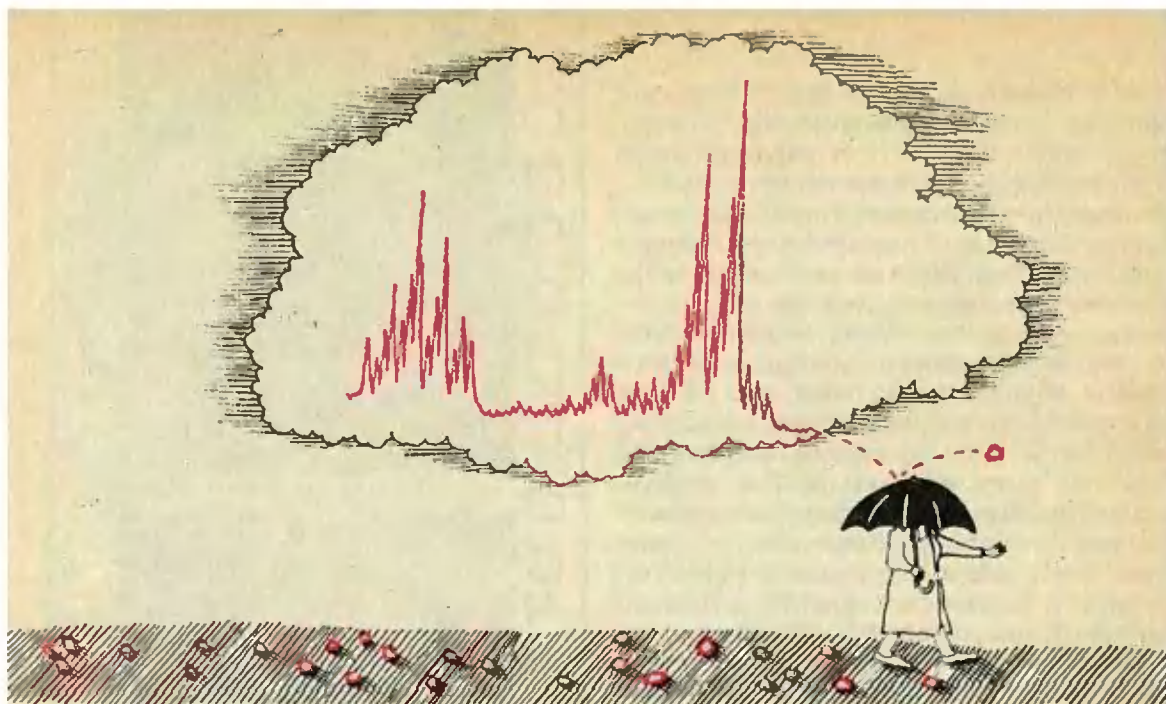


ния вихрей краситель надо посыпать на поверхность примерно через 1 минуту после старта. При хорошей центровке сосуда (т. е. ось сосуда должна совпадать с осью вращения) в жидкости образуется промежуточная картина — конвективные кольца (рис. 3). Эти кольца образуются за счет действия двух механизмов — конвекции и неравномерности вращения жидкости, обусловленной тем, что не вся жидкость закрутилась сразу с одной скоростью. Холодная жидкость опускается вниз по кольцам, а теплая поднимается вверх между кольцами. За счет этого на кольцах возникает так называемая сдвиговая неустойчивость, т. е. неустойчивость, вызванная тем, что с одной стороны кольца жидкость движется в одну сторону, а с другой — в другую. Такой тип неустойчивости в природе наблюдается повсеместно: в океане, в атмосфере на границе встречных течений. Граница в этом случае постепенно разрушается. Так, в наших экспериментах на кольцах начинают образовываться вихри, которые потом выстраиваются в определенную структуру.

Отметим, что одним из определяющих параметров в системе является глубина жидкости. Если взять сосуд, в котором глубина в одном месте отличается от глубины в другом (поставить промежуточное дно в одной половине), то в разных частях банки возникают вихри с различными структурами и на границе раздела решеток также происходят интенсивные вихревые взаимодействия.

Теоретические исследования даже самых простых вихревых движений очень сложны. Эксперимент позволяет изучить основные простейшие «кирпичики», из которых складывается сложное движение. Так, взаимодействие «пыльных дьяволов» в пустынях происходит аналогично наблюдаемому в простейших экспериментах, т. е. по двойной спирали. Эти же эксперименты позволяют ответить на вопрос: когда вихри будут жить в мире друг с другом, а когда один поглотит другой, что постоянно наблюдается в атмосфере и легко видно на так называемых картах погоды.





Искусство программирования

Об одной рекуррентной последовательности

В. В. ГУРАРИЙ, К. А. СТЫРКАС
(ученики 10 кл.)

В журнале «В мире науки» № 3 за 1984 год была опубликована статья Брайана Хэйсса «Взлеты и падения чисел-градин». В этой статье рассказывалось об одной интересной задаче о числовых последовательностях. Мы хотели бы рассказать о ней и о некоторых любопытных результатах, связанных с попытками ее решения.

Формулировка этой задачи предельно проста. Возьмем некоторое натуральное число. Если оно четное, разделим его на 2, в противном случае умножим на 3 и прибавим 1. С полученным числом снова повторим те же операции. Вопрос задачи состоит в следующем: как будет выглядеть полученная последовательность в зависимости от начального числа?

Вообще можно ожидать две возможности: либо данная последовательность является расходящейся, то

есть получаемые числа будут неограниченно увеличиваться, либо после какого-то количества операций мы получим число, уже ранее встречавшееся в нашей последовательности. В этом случае числа в ней начнут периодически повторяться, и данная последовательность «защелкнется».

Рассмотрим самое первое натуральное число — единицу. Наша последовательность будет такой: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Далее все повторяется сначала. Числа 2 и 4 рассматривать не имеет смысла, так как они уже встречались, и новой последовательности чисел мы не получим.

Перейдем к числу 3. Как нетрудно убедиться, за ним следуют числа 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ... Мы снова пришли к замкнутому циклу 1, 4, 2, 1, ...

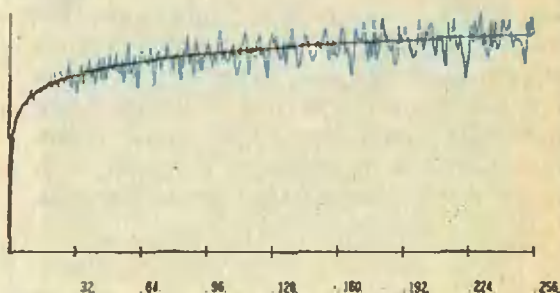


Рис. 1.

Числа 5 и 6 не представляют интереса: 5 уже встречалось ранее, а число 6 сразу же переходит к уже исследованному числу 3.

Следующее число — 7. За ним следуют числа 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Пропустим теперь несколько чисел и остановимся на числе 27. Здесь уже не происходит быстрого спуска к единице, как в предыдущих примерах. Если продолжить вычисления, то мы получим по пути такие числа, как 214, 484, 700, 1186, 2158. На 77 шаге мы получим очень большое число: 9232. Но все-таки и этот процесс заканчивается: после 111 шагов последовательность опускается к единице.

В Токийском университете была произведена «проверка» всех чисел до 2^{40} , то есть примерно до 10^{12} . Результат проверки был одним и тем же для всех чисел — все они в конце концов приходили к числу 1.

Однако строго доказать, что любая последовательность приходит к единице, пока не удалось никому.

Когда эта задача была поставлена в Йельском университете, на целый месяц прекратились математические исследования, так как все математики безуспешно пытались решить эту проблему. Такая же история произошла и в Чикагском университете. Ходила шутка, что эта задача использовалась с целью дезорганизовать американскую математическую науку.

Продолжим наше экспериментальное исследование. Попытаемся найти число операций, за которое «среднее» число приходит к единице. Будем считать, что с вероятностью 1/2 оно является четным, а с вероятностью 1/2 является нечетным. В первом случае оно уменьшается вдвое. Во втором случае оно сначала увеличивается примерно в 3 раза (прибавлением

единицы можно пренебречь), но затем обязательно делится на 2. Следовательно, во втором случае число увеличивается примерно в полтора раза за две операции. Итак, за 3 шага «среднее» число уменьшается в среднем в 4/3 раза.

Отсюда напрашивается вывод, что число операций, необходимое, чтобы привести среднее число n , равно $3 \cdot \log_{4/3} n$. Насколько верна эта гипотеза, можно проверить на ЭВМ.

На рисунке 1 представлен результат этой работы. Машина исследовала группы, состоящие из 256 последовательных натуральных чисел: от 1 до 256, от 257 до 512 и т. д. Для каждой группы считалось среднее количество операций и среднее значение величины $3 \cdot \log_{4/3} n$. Всего было исследовано 256 таких групп. Для наглядного сравнения приводится график (рис. 1), в котором по оси x откладывался порядковый номер группы, а по оси y — две величины (средний логарифм и среднее количество шагов). Красная кривая — ожидаемая логарифмическая зависимость, синяя — экспериментально полученная зависимость количества операций. Видно, что синяя кривая хоть и колеблется вокруг красной, но в среднем значения искомым величин совпадают. Следовательно, можно считать, что формула количества операций «среднего» числа довольно точно описывает поведение больших групп реальных чисел, по крайней мере в пределах первой сотни тысяч.

Любопытная картина получается и при выводе на график траекторий чисел. Если мы по оси x будем откладывать номер операции, а по оси y — число, получающееся после проведения этой операции, то возникает этот график (рис. 2). Он похож на траекторию градины в грозовой туче, которая то поднимается в воздушных по-

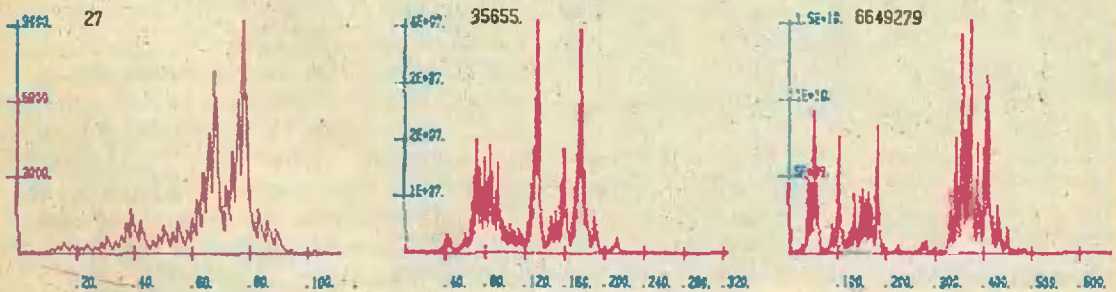


Рис. 2.

Наш кашендарь



Луиджи Гальвани

(к 250-летию со дня рождения)

Известный итальянский физик и физиолог Л. Гальвани родился в 1737 году в Болонье. В 1759 году он окончил старейший в Европе Болонский университет, получив ученое звание доктора медицины и философии. Потянулись годы напряженной работы — врачебная практика, преподавание медицинских дисциплин в университете, собственные медико-биологические изыскания.

Сначала научные интересы Гальвани сосредоточивались на сравнительной анатомии — главным образом птиц, но к 70-м годам ученый постепенно переключается на исследования по физиологии нервов и мышц. Эксперименты подобного рода удобнее всего проводить на препаратах лягушки. Уже в 1773 году появляется работа по сокращению мышц лягушки, а через год — исследование влияния, оказываемого на ее нервы опиумом.

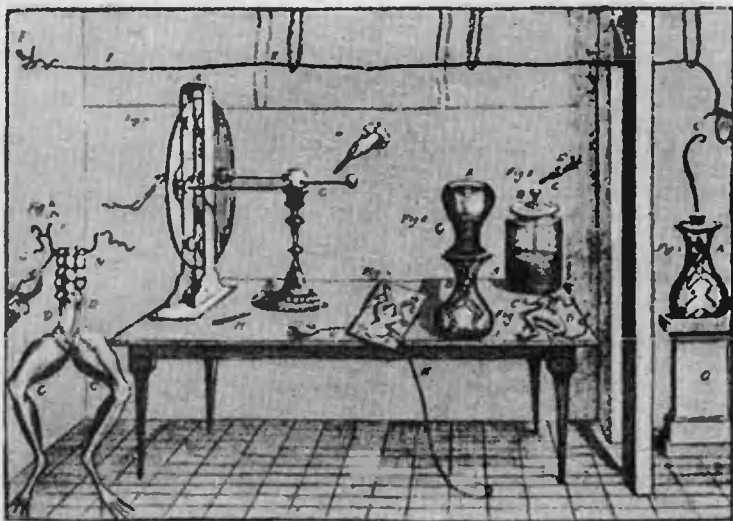
Неудивительно, что заинтересовался Гальвани и действием на лягушечьи нервы и мышцы электрических разрядов. Еще в середине века широкое распространение по-

лучили электростатические машины и лейденские банки (накопители электричества), а опыты по действию электрических разрядов на живые организмы захватили и лаборатории естествоиспытателей, и великосветские салоны. Чаще всего объектом такого экспериментирования — порой небезопасного! — становился человеческий организм. Многих медиков занимала возможность применения электричества в лечебных целях.

Гальвани поставил перед собой более скромную задачу — определение количественных характеристик действия электрического разряда на нервы и мышцы. В опытах, начатых, по-видимому, в 1780 году, он прикоснулся к лягушечьей лапке проводником, соединенным с кондуктором электростатической машины, и пытался установить связь между интенсивностью конвульсивных сокращений мышцы и силой электрического разряда. Ученый провел множество экспериментов и уже склонялся к мысли, что основные характеристики явления выяснены. Но, как писал он впоследствии, «легко ошибиться в исследовании и считать виденным и найденным то, что мы желаем увидеть и найти». Неожиданно обнаружилось, что при разряде электростатической машины лягушечья

лапка дергается и в том случае, когда к ней прикасаются проводником, не соединенным с кондуктором, — нужно лишь, чтобы этот проводник был заземлен. Гальвани был необычайно удивлен новым эффектом: «Я зажегся страстным желанием исследовать это явление и выяснить его скрытые причины». (Сейчас нам ясно, что этот эффект связан с электризацией лягушечьего препарата «через влияние» и стеканием наведенного заряда на землю).

Эксперименты с заменой электростатической машины на лейденскую банку и лягушечьих лапок на препараты других животных приводили к тем же результатам, но никак не углубляли понимание явления. И Гальвани решил перейти от экспериментов с «искусственным» электричеством (т. е. электричеством натертых изоляционных палочек, электростатических машин и лейденских банок) к опытам с «естественным» электричеством молний. Естественно, были получены совершенно аналогичные результаты: «Как только появлялись молнии, тотчас же мышцы (лягушечьи препараты) приходили в сильные сокращения, которые совпадали по времени с молнией и предшествовали грому». Не явилось неожиданным и то обстоятельство, что лягушечьи лапки подергивались — хотя и не так активно — и без молний, когда небо заволакивали темные тучи или низко проплывали облака. Казалось бы, все ясно: подергивания про-



Первые опыты Гальвани.

исходят под действием атмосферного электричества.

Однако столь определенного вывода Гальвани все же не сделал. Дело в том, что даже в тихую безоблачную погоду ему нередко доводилось наблюдать конвульсивные сокращения лягушечьих препаратов, подвешенных к железной решетке балкона на проволочных крючках, протыкавших спинной мозг животного (вероятно, это происходило, когда дуновение ветра приводило лапку в контакт с прутьями решетки). Но, как это часто бывает, когда возникла мысль специально наблюдать за этим эффектом, он почти перестал появляться: «Я стал наблюдать препараты в разные часы в течение многих дней, но едва заметил несколько мышечных сокращений. Утомленный ожиданием, я изогнул и плотно прижал к решетке крючок, пропущенный через спинной мозг... Теперь сокращения появлялись нередко, однако вне всякой связи с изменением атмосферы или электричества».

Поскольку выходило так, как будто атмосферное электричество роли, во всяком случае главной, не играет, Гальвани решил по возможности вообще освободиться от его влияния и перенес опыты в помещение. Дальнейшие систематические наблюдения привели его к следующим выводам: а) при соединении проводником бедренного нерва (он проходит в области спинного мозга) с мышцей лягушечьей лапки наблюдаются, но не всегда, слабые сокращения препарата; б) если сое-

динительный проводник составлен из двух разных металлов, например из меди и цинка, всегда наблюдаются сильные сокращения.

Результаты десятилетних исследований Гальвани опубликовал в 1791 году в «Трактате об электрических силах при мышечных движениях». Эта работа быстро получила широкую известность среди итальянских и зарубежных медиков и естествоиспытателей, которые сразу же принялись повторять описанные эксперименты. Для объяснения всего комплекса наблюдавшихся явлений Гальвани выдвинул теорию «животного» электричества, т. е. электричества, во всем подобного «искусственному» или «естественному», но вырабатывающегося самим организмом животного. Ученый полагал, что сокращения лягушечьих препаратов являются следствием электрического разряда, происходящего, когда металлический проводник соединяет нервы и мышцы, которые функционируют как накапливающие «электрическую жидкость» обкладки лейденской банки.

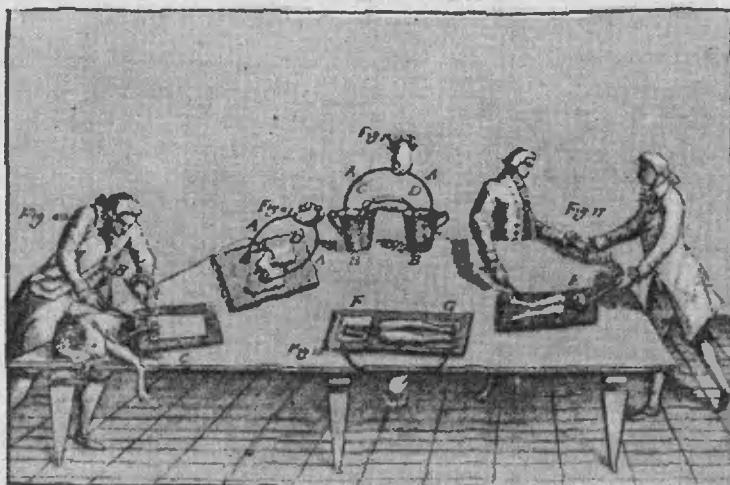
Теория Гальвани была встречена с энтузиазмом большинством ученых, в том числе его соотечественником А. Вольтой (1745—1827), считавшимся одним из ведущих специалистов по электричеству. Однако в рассуждениях своего болонского коллеги Вольта сразу же обнаружил весьма существенное улучшение. В самом деле, как это ни странно, но Гальвани не только не попытался истолковать, но и вообще не придал зна-

чения тому твердо установленному им удивительному факту, что мощные сокращения препаратов наблюдаются лишь в том случае, если соединительный проводник состоит из двух разнородных металлов! Занявшись решением этой загадки, Вольта уже в 1793 году пришел к выводу о том, что из опытов Гальвани «никим образом нельзя заключить о действительном существовании животного электричества». «Я произвел опыты, — писал он далее, — которые обнаруживают такой же переход электрической жидкости в случае, когда металлы разных родов приложены не к животным тканям, а к каким-либо влажным предметам, например к бумаге, коже, сукину и т. д.» Прошло еще семь лет, и начавшиеся с «загадки Гальвани» исследования Вольты привели его к великому открытию — к изобретению «вольтова столба», первого гальванического элемента, открывшего человечеству эру электрического тока.

Гальвани в это время уже не было в живых — он умер в Болонье в 1798 году. До последних дней Гальвани оставался верным своей теории животного электричества — теории, представлявшейся большинству ученых полностью опровергнутой работами Вольты и других физиков. А между тем еще в 1794 году Гальвани описал опыты, в которых электрические эффекты в лягушечьих препаратах наблюдались без применения каких-либо металлических приспособлений (даже само препарирование он производил стеклянным скальпелем!).

Только через полстолетия ученые начали осознавать, что представления Гальвани о животном электричестве далеко не беспочвенны. Возникла обширная медико-биологическая дисциплина — электрофизиология, и подобно тому, как физики причисляют Гальвани к зачинателям учения об электричестве, электрофизиологи считают его основоположником своей науки. При этом стоит еще добавить, что электрические явления в биологических тканях оказались гораздо более сложными, чем в неживой природе, и реальных успехов в выяснении их «механизмов» удалась достигнуть лишь в наше время.

Б. Е. Явлов



Различные опыты Гальвани.

3. Число 10 можно изобразить при помощи одной двойки:

$$10 = \left[\sqrt{\left[\left[-\sqrt{\left[-\arccos\left(-\sqrt{2}\right) \right]!} \right]! \right]!} \right]$$

(здесь $[x]$ — это целая часть числа x).

4. Любое натуральное число можно изобразить при помощи двух двоек.

5. При любом натуральном n между числами $\frac{n}{\lg 2}$ и $\frac{n+1}{\lg 2}$ существует хотя бы одно натуральное число k :

$$\frac{n}{\lg 2} < k < \frac{n+1}{\lg 2};$$

при этом $[\lg 2^k] = n$.

6. Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной десятки:

$$n = \left[-\lg \left(\lg \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{10}}}}_{k \text{ раз}} \right) \right],$$

где k таково, что $\frac{n}{\lg 2} < k < \frac{n+1}{\lg 2}$.

7. Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной двойки.

8. Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной единицы.

9. Единицу можно изобразить при помощи одного произвольного числа:

$$1 = \left[|\sin x| \right]!$$

(напомним, что $0! = 1! = 1$).

10. Любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа.

К этой не совсем серьезной игре можно сделать одно серьезное замечание: к сожалению, в наших утверждениях нельзя пропустить слово «натуральное». Дело в том, что множество всех чисел, которые могут быть изображены при помощи одного числа (или конечного количества чисел), является счетным. А множество действительных чисел, увы, несчетно...

Упражнения

1. Изобразите при помощи цифр 1, 9, 8, 7 (взятых ровно по одному разу) все натуральные числа от 1 до 1987.

2. Изобразите при помощи одного единственного числа 1987 число 1988.

3. Верно ли, что любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа, если клавиша с символом \lg не работает (автору статьи это неизвестно)?

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели,

и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организуются факультативные занятия по математике и основам информатики. Успешно закончив-

шие обучение получают свидетельство об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 7 по 19 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

1987). На с. 61 в ответах к задаче 2 варианта 1 должно

быть $x \in \left[\frac{1}{2\pi}; 1 \right) \cup [9; \infty)$, к задаче 2 варианта 3 первая се-

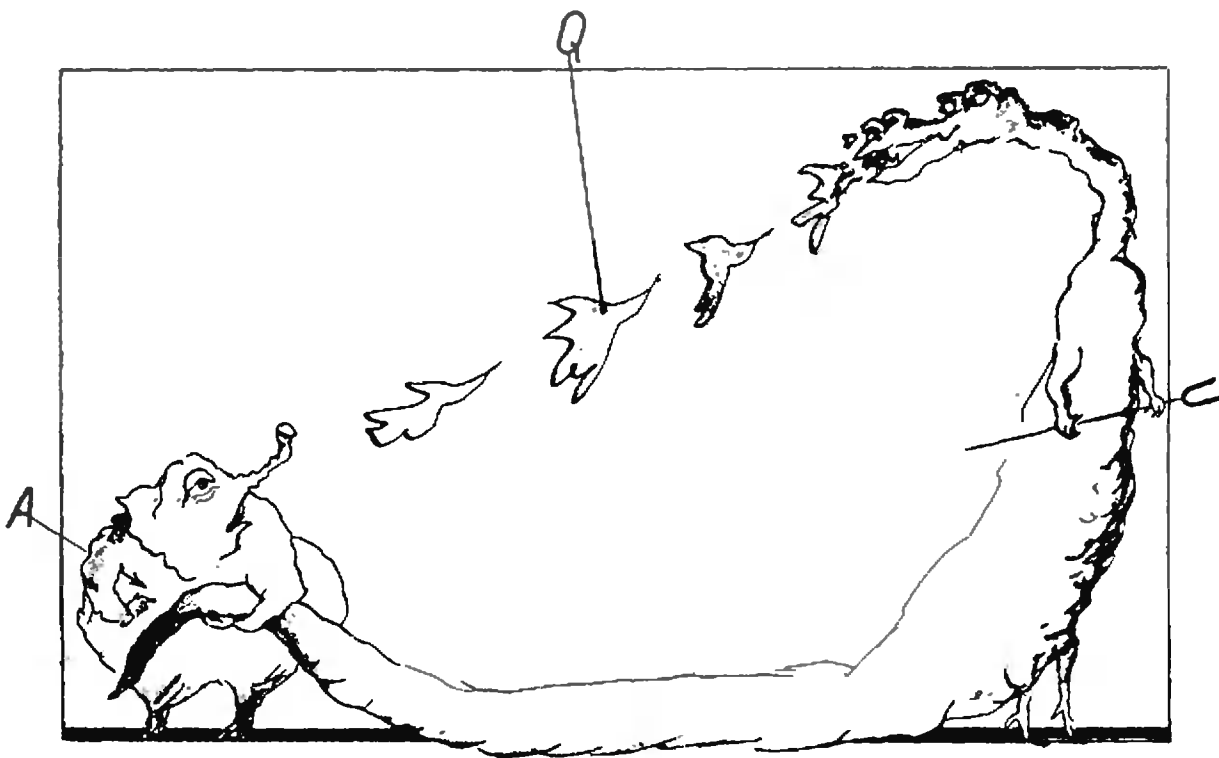
рия $x = 2\pi k$, к задачам 2 и 5 варианта 4 соответственно $x \in [4; \infty)$ и

$$Q = \sqrt[3]{\frac{9D^2}{8 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}}$$

На с. 62 в ответе к задаче 2 варианта 1 Московского станкоинструментального института $k_1 = -\frac{6}{19}$. Редакция приносит читателям свои извинения.

Поправка

В ответах к вариантам вступительных экзаменов по математике были допущены ошибки (см. «Квант», № 5,



Уракишиши Бимурисенна ●

Работа, энергия, тепло

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Значительное число задач на вступительных экзаменах по физике касается процессов превращения механической энергии в тепловую и наоборот. Впервые цикл таких задач появляется в разделе «Механика» школьного курса физики при изучении механических движений, в которых необходимо учитывать силы трения, при рассмотрении неупругих соударений тел и т. п. Второй раз школьники встречаются с аналогичными задачами в разделе «Тепловые явления. Молекулярная физика» при знакомстве с различными тепловыми процессами, с работой тепловых двигателей и т. д.

Превращение механической энергии в тепловую

В основе решения задач на эту тему лежит закон сохранения энергии, сформулированный в виде: при взаимодействии тел в замкнутой системе выделившееся количество теплоты равно разности механической энергии системы до и после взаимодействия.

Задача 1. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v , застревает в мешке с песком, движущемся ей навстречу со скоростью u . Определите выделившееся при этом количество теплоты.

При решении этой задачи будем считать, что процесс застревания пули в мешке с песком происходит настолько быстро, что изменением потенциальной энергии пули можно пренебречь (это будет иметь место, если сила, действующая на пулю со стороны мешка с песком, значительно больше силы тяжести пули). Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, выделившееся при «торможении» пули количество теплоты бу-

дет определяться изменением только кинетической энергии пули и мешка.

Если систему отсчета связать с мешком и предположить, что масса мешка с песком много больше массы пули, и поэтому его скорость не изменяется за время застревания пули в песке, то выделившееся количество теплоты найдем по формуле

$$Q_1 = \frac{m}{2}(v+u)^2.$$

Здесь мы учли, что пуля и мешок до соударения двигались навстречу друг другу, а после взаимодействия скорость пули относительно мешка стала равной нулю.

Если же в качестве системы отсчета выбрать землю и снова считать, что при соударении с пулей скорость мешка не изменяется, то количество теплоты будет равно разности кинетических энергий пули до и после взаимодействия с мешком:

$$Q_2 = \frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}u^2 = \frac{m}{2}(v^2 - u^2).$$

Итак, $Q_1 \neq Q_2$. Но этого быть не может, поскольку количество теплоты не должно зависеть от выбора системы отсчета. Чтобы «снять» парадокс, рассмотрим процесс взаимодействия пули с мешком в системе отсчета, связанной с землей, более детально. Будем считать, что масса мешка M хотя и много больше массы пули m ($M \gg m$), но все же величина конечная. Запишем для системы пуля — мешок закон сохранения импульса (в проекциях на ось координат, совпадающую по направлению с начальной скоростью пули \vec{v}):

$$mv_x + Mu_x = (M+m)u'_x,$$

или

$$mv - Mu = -(M+m)u',$$

где u' — скорость системы после застревания пули, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}u^2 = \frac{(M+m)}{2}u'^2 + Q.$$

Отсюда находим выделившееся при соударении количество теплоты:

$$Q = \frac{Mm}{2(M+m)}(v+u)^2 \approx \frac{m}{2}(v+u)^2.$$

Таким образом, получаем, что никакого недоразумения действительно нет, в обеих системах отсчета полу-

чается один и тот же результат. Однако при расчете выделившегося количества теплоты в данном примере проще и разумнее было воспользоваться системой отсчета, связанной с мешком, а не с землей.

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что и в более общем случае абсолютно неупругого соударения двух тел произвольных масс m_1 и m_2 , движущихся по одной прямой с произвольными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , выделившееся количество теплоты определяется аналогично и оказывается равным

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_{1x} - v_{2x})^2,$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции скоростей на соответствующую ось координат.

Задача 2. Небольшому грузу массой m , лежащему на длинной горизонтальной доске массой M , сообщили скорость \vec{v} , направленную вдоль доски (рис. 1). Найдите количество теплоты, которое выделится к моменту окончания скольжения груза по доске. Доска по плоскости может двигаться без трения.

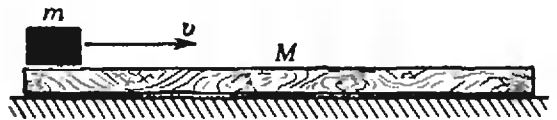


Рис. 1.

В данном случае выделившееся количество теплоты будет определяться работой сил трения скольжения. Однако для ответа на вопрос задачи достаточно воспользоваться готовой формулой, приведенной в конце решения предыдущей задачи:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_{1x} - v_{2x})^2 = \frac{mM}{2(m+M)}v^2.$$

Здесь мы предположили, что доска достаточно длинная, так что груз успевает «затормозиться» на ней.

В заключение первого раздела статьи — два вопроса для самостоятельного обсуждения.

Вопрос 1 (который был одно время популярен на вступительных экзаменах по физике на химический факультет МГУ). Металлическую пружину растворяют в кислоте. Один раз в сжатом состоянии, другой — в свободном. Чем будут отличаться последствия таких растворов?

Вопрос 2 (с которым приходилось сталкиваться поступающим на геологический факультет МГУ). На что идет кинетическая

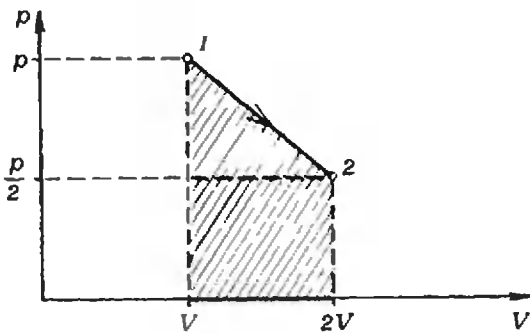


Рис. 2.

энергия метеорита, сгорающего в атмосфере Земли?

Как «работает» первый закон термодинамики

Напомним, что этот закон является частным случаем закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам. Вот его формулировка: изменение внутренней энергии (ΔU) термодинамической системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме количества теплоты (Q), переданного системе, и работы (A) внешних сил, т. е.

$$\Delta U = Q + A.$$

Первый закон термодинамики можно записать несколько иначе:

$$Q = \Delta U + A',$$

где A' — работа системы над внешними телами.

Про каждое состояние системы можно сказать, что ему отвечает тот или иной запас внутренней энергии. Однако нельзя сказать, что в системе содержится определенное количество теплоты, так и работа характеризуют процесс изменения энергии системы, и поэтому для одного и того же ΔU , но для разных процессов и Q и A разные.

Задача 3. В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой $m = 0,2$ кг при температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Азот, расширяясь, совершает работу $A' = 4,47$ кДж. Найдите изменение внутренней энергии азота и его температуру после расширения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ Дж/(кг·К).

Подвода тепла к газу не производится — ведь цилиндр теплоизолирован. Поэтому первый закон термодинамики позволяет записать:

$$0 = \Delta U + A',$$

т. е.

$$\Delta U = -A' = -4,47 \text{ кДж.}$$

В этом случае изменение внутренней энергии газа отрицательно — азот охлаждается.

Зная теплоемкость при постоянном объеме и изменение внутренней энергии, мы легко можем найти изменение температуры газа. Действительно, при постоянном объеме газ работы не совершает ($p\Delta V = 0$), и подводимое количество теплоты $Q = c_V m \Delta T$ совпадает с изменением внутренней энергии ΔU :

$$\Delta U = c_V m \Delta T.$$

Отсюда найдем изменение температуры газа $\Delta T = t_2 - t_1$ (здесь все равно, какой температурной шкалой пользоваться — Цельсия или Кельвина) и температуру азота после расширения:

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \frac{\Delta U}{c_V m} = t_1 - \frac{A'}{c_V m} = \\ &= -10^\circ\text{C} \text{ (или } T_2 = 263\text{K)}. \end{aligned}$$

Задача 4. На p - V -диаграмме (рис. 2) изображен процесс расширения газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением $p/2$ и объемом $2V$. Найдите количество теплоты, которое сообщили этому газу. Линия 1—2 — отрезок прямой.

Основным моментом при решении этой задачи является вывод о том, что начальная и конечная температуры газа одинаковы. Действительно, произведения pV и $(p/2)(2V)$ равны, а значит, равны и температуры (вспомним закон Менделеева—Клапейрона). Но коль скоро не изменилась температура газа, не изменилась также и его внутренняя энергия (см. решение предыдущей задачи): $\Delta U = 0$. Тогда из первого закона термодинамики следует, что сообщенное газу количество теплоты равно работе, совершенной газом: $Q = A'$. На p - V -диаграмме работа изображается заштрихованной на рисунке площадью трапеции, поэтому

$$A = \frac{1}{2} \left(p + \frac{p}{2} \right) (2V - V) = \frac{3}{4} pV.$$

Задача 5. Над газом совершают два тепловых процесса, переводя его из одного и того же начального состояния и нагревая до одинаковой

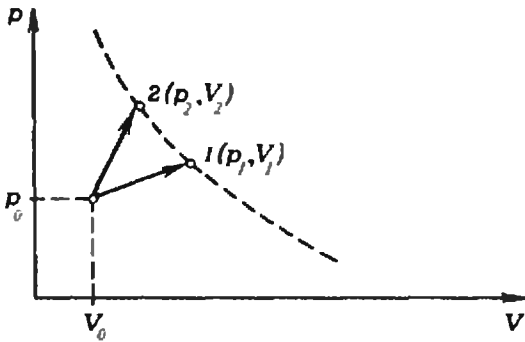


Рис. 3.

конечной температуры (рис. 3). При каком процессе газу сообщается большее количество теплоты?

Прежде всего представим процессы на p - V -диаграмме. Заметим, что конечные точки $1(p_1, V_1)$ и $2(p_2, V_2)$ лежат на одной изотерме (пунктирная линия на рисунке). В соответствии с первым законом термодинамики подводимое к газу количество теплоты равно сумме совершенной газом работы и изменения его внутренней энергии. Поскольку и начальные, и конечные температуры для обоих процессов одинаковы, изменения внутренней энергии тоже одинаковы. Следовательно, подводимое количество теплоты будет больше в том процессе, в котором газ совершает большую работу.

Вычисляя площади соответствующих трапеций (см. решение предыдущей задачи), находим, что работа в первом процессе равна

$$A_1 = \frac{1}{2} (p_0 + p_1) (V_1 - V_0),$$

а во втором —

$$A_2 = \frac{1}{2} (p_0 + p_2) (V_2 - V_0).$$

Учитывая, что конечные точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, т. е. $p_1 V_1 = p_2 V_2$, можем записать

$$\begin{aligned} 2(A_1 - A_2) &= p_0(V_1 - V_2) + V_0(p_2 - p_1) = \\ &= (V_1 - V_2) \left(p_0 + p_1 \frac{V_0}{V_1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, разность работ положительна, если $V_1 > V_2$, и полный ответ на поставленный вопрос следующий: большее количество теплоты подводится в том процессе, где конечный объем газа больше.

Задача 5. Тепловая машина имеет коэффициент полезного дейст-

вия (КПД) $\eta = 20\%$. Каким станет ее КПД, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 40% , а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 20% ?

Напомним, что коэффициент полезного действия (η) равен отношению работы (A), совершаемой тепловой машиной за цикл, к величине получаемого ею количества теплоты ($Q_{\text{п}}$): $\eta = A/Q_{\text{п}}$. Из закона сохранения энергии следует, что работа (A) равна разности получаемого от нагревателя ($Q_{\text{п}}$) и отдаваемого холодильнику ($Q_{\text{от}}$) количества теплоты: $A = Q_{\text{п}} - Q_{\text{от}}$. Тогда КПД машины

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{п}}} = \frac{Q_{\text{п}} - Q_{\text{от}}}{Q_{\text{п}}} = 1 - \frac{Q_{\text{от}}}{Q_{\text{п}}}.$$

Вначале $\eta = 20\%$, и отношение $Q_{\text{от}}/Q_{\text{п}}$ равно $0,8$. Затем количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличилось на 40% и стало равным $Q'_{\text{п}} = 1,4Q_{\text{п}}$, а количество отдаваемой холодильнику теплоты уменьшилось на 20% , т. е. стало равным $Q'_{\text{от}} = 0,8Q_{\text{от}}$. Таким образом, новое отношение $Q'_{\text{от}}/Q'_{\text{п}} = 0,8Q_{\text{от}}/1,4Q_{\text{п}} \approx 0,46$, и КПД машины стал

$$\eta' = 1 - 0,46 \approx 0,54,$$

т. е. увеличился и теперь составляет примерно 54% .

Упражнения

1. Моль идеального одноатомного газа с начальной температурой $T = 600$ К адиабатически увеличивает свой объем в 3 раза. Какую работу совершает при этом газ, если в тепловом процессе, при котором давление линейно изменяется с объемом, газу при расширении из того же начального в то же конечное состояние было подведено количество теплоты $Q = 1,9$ кДж?

2. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный водяной пар. При изотермическом вдвигании в сосуд поршня выделилось количество теплоты Q . Найдите совершенную при этом работу. Молярная масса пара M , удельная теплота парообразования воды g .

3. За время $\tau = 1$ ч в холодильнике превращается в лед при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ масса воды $m = 3,6$ кг, имевшая начальную температуру $t = 20^\circ\text{C}$. Какая мощность потребляется холодильником от электросети, если он отдает в окружающее пространство в единицу времени энергию $Q_0 = 840$ Дж/с? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг.

Информация

Х Турнир юных физиков

Науки юношей питают,
Отраду старым подают,
В счастливой жизни
украшают,
В несчастной — случай
берегут...

М. В. Ломоносов

Турнир проводится физическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова с сентября 1987 по февраль 1988 года.

Решения задач заочного коллективного конкурса необходимо отправить не позднее 16 ноября 1987 года по адресу: 119899 Москва ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет ТЮФ-Х. В графе «Кому» напишите: заочный конкурс ТЮФ-Х и номера задач, решения которых вы посылаете. В конверт вложите анкету:

1. Почтовый адрес школы.
2. Фамилия, имя, отчество руководителя команды.
3. Список авторов решений.

В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированные проблемы будут отмечены грамотами турнира и предложены для публикации в журнале «Квант».

Более подробную информацию о ТЮФ-Х можно получить в Оргкомитете ТЮФ по вышеуказанному адресу.

Задачи заочного коллективного конкурса ТЮФ-Х

1. Придумай сам. Предложите оригинальные проекты технического и научного использования высокотемпературной сверхпроводимости.

2. «Вечприемник». Сконструируйте и изготовьте переносной радиоприемник, не использующий источников питания. Зачетный параметр: $\kappa = P/Lt$, где P — звуковое давление на расстоянии 1 м от приемника, L — максимальный линейный размер приемника, t — масса приемника.

3. Camera obscura. Выполните групповой портрет вашей команды с помощью камеры-обскуры. Обоснуйте физические принципы получения качественного снимка с помощью такого приспособления.

4. Электрическая цепь. Несколько узлов ($n < 10$) соединены между собой батареями с известными ЭДС и r . Составьте программу вычислений на ЭВМ для определения разности потенциалов между первым и вторым узлами. Критерием качества программы считайте время от начала ввода данных в компьютер (таблицы значений ЭДС и r) до момента выдачи правильного результата.

5. Метрология. Определите предельную точность измерения длины стальной линейки.

6. Продавец вакуума. Предпринимчивый звездоплаватель решил поставлять в физические лаборатории мира вакуум из космического пространства. Каковы шансы на успех его предприятия?

7. Солнце на закате. Видимый диск Солнца на закате сплюснут. Экспериментально измерьте и опишите эти искажения. Рассчитайте теоретическое отношение горизонтального и вертикального размеров солнечного диска, касающегося линии горизонта.

8. Цветное телевидение. Вам надо сконструировать четырехцветный телевизор. Какие цвета вы бы выбрали в качестве основных? Должна ли измениться при этом съемочная аппаратура?

9. Девятый вал.

«Передо мною волны моря. Их много. Им немалый счет.»

Б. Пастернак

Существует ли «девятый вал»? Внесите ясность в этот вопрос. В качестве отправной

точки можете использовать идеи, изложенные в статье «Тройка, семерка, туз ...» (Знание — сила, 1987, № 1, с. 97—104).

10. Самовозгорание.

«Но и от ветра, когда, раскачавшись, деревья ветвями, Сильно шатаясь, начнут налегать одно на другое, Мощное трение их источает огонь, и порою, Вспыхнувши, вдруг заблестит и взнесется горячее пламя, Если взаимно они и стволами, и сучьями трутся.»

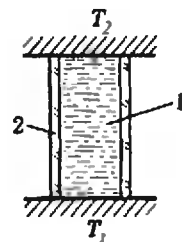
Лукреций Кар.

Так римский философ объяснял происхождение лесных пожаров. Оцените вероятность такого возгорания и его место в ряду факторов, вызывающих возникновение пожаров в природе, т. е. не являющихся следствием деятельности человека.

11. Лампа накаливания. Утверждают, что две лампочки по 60 Вт дают больше света, чем три лампочки по 40 Вт. Так ли это? Исследуйте, как изменяются светоточка и срок службы лампы накаливания при небольшом изменении напряжения питания.

12. Весна в городе. Весна в городе наступает раньше, чем в сельской местности. Опишите основные факторы, приводящие к этому, и приведите численные оценки. В частности, что будет, если однажды вывезти весь снег из Москвы за город?

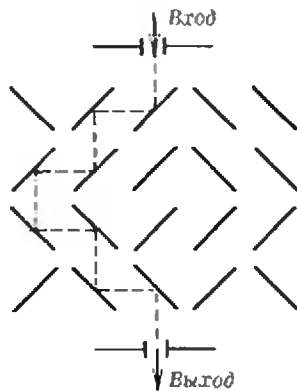
13. Теплопередача. Исследуйте теплопередачу через вертикальный столб воды в двух случаях: $T_1 < T_2$ и $T_1 > T_2$.



1 — водяной столб,
2 — теплоизоляционная труба.

14. Мезоскопика. Один из мезоскопических эффектов состоит в том, что сопротивление двумерного металлического образца при низких температурах может существенно измениться при изменении по-

ложения всего лишь одного атома решетки. Наглядное представление об этом эффекте можно получить, рассматривая следующую модель: в узлах двумерной решетки $l \times l$ ($l \gg 10$) расположены маленькие плоские зеркала с коэффициентом отражения, равным единице. Каждое зеркало может пребывать лишь в двух положениях: с наклоном под углом 45° либо вправо, либо влево.



Состояние зеркал хаотически изменяется, поэтому лазерный луч, попадающий на узел решетки, с равной вероятностью отражается в одну или другую сторону на 90° . Оцените, как изменится световая мощность на выходе системы, если в один из узлов вместо зеркала поместить элемент, полностью поглощающий свет.

15. Медный грош. Монета в 1 копейку «выпала» из космической ракеты и стала искусственной планетой Солнечной системы. Оцените время ее существования как планеты, учитывая взаимодействие с солнечным светом.

16. Электроны в ловушке. Несколько электронов ($2 \leq n \leq 30$) могут свободно перемещаться внутри круга радиуса R . Какое взаимное расположение электронов устойчиво?

17. Резистор Каллиostro. Для школьного тестера даже человек — это резистор. Исследуйте с помощью школьного тестера законы последовательного и параллельного соединения таких резисторов (традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок).

Советы дебиотантам турнира

Как решать турнирную задачу. Условия турнирных задач часто ставят дебиота в тупик. Иногда ему даже не ясно, что, собственно, решать, и совсем не понятно, как решать! В таком случае нужно

поступать так, как это делают физики. Задачу нужно максимально упростить, сузить, ограничить в рамках простых и ясных допущений, поставить четкий и ясный вопрос, на который можно отвечать. Затем постараться получить качественный ответ — здесь вам помогут соображения подобия, метод размерностей и ваша интуиция. Но ограничиваться этим нельзя. В решении должна быть строгость и полнота. Смело экспериментируйте. Помните, что почти все задания турнира допускают проведение экспериментального исследования. Предостерегаем вас от чрезмерного увлечения аппаратом высшей математики. Турнир не преследует таких целей. В первую очередь должны быть освещены именно качественная сторона и физическая суть проблемы.

Как можно работать коллективно. Для этого организуйте рабочие заседания (встречи). Первая встреча — организационная. На нее приглашайте всех, кто интересуется турниром. Здесь прочтите задания турнира, и пусть желающие выберут себе задачи для решения. Не беда, если некоторые задачи захотят решать многие, а часть задач остается не выбранной. Главное содержание первой встречи — начало работы. Вряд ли стоит сразу же находить капитана и оговаривать состав команды, но «координатор» ваших встреч совершенно необходим. Он должен знать все о состоянии дел: когда состоится следующая встреча, какие задачи будут обсуждаться, что уже решено и кем, что в стадии решения, что еще совсем не решается и т. д.

Следующие встречи — рабочие. На них звелушиваются решения задач и после критических замечаний и уточнений принимаются или отправляются на доработку. Если какое-то решение принимается, то желательно, не откладывая на завтра, окончательно оформить его и положить в папку готовых решений. На таких встречах складываются творческие коллективы и постепенно определяется состав команды. Скоро выяснится, что одни участники встреч приносят много решенных задач, другие сильны в организационном плане, третьи не решают задач, но выдвигают свежие и здравые

идеи, а некоторые сильны своими критическими замечаниями или же просто умеют создавать атмосферу эмоционального подъема и творческого накала. Все они на своем месте и необходимы коллективу. В середине октября нужно будет проверить, что же сделано — подвести итог. Если окажется, что некоторые задачи не решены или не решались вовсе, то теперь их уже надо распределить по рабочим группам и назначить сроки исполнения с тем, чтобы выработать совместное решение этих задач (возможно, в упрощенном виде — правила турнира это допускают).

На последней встрече необходимо сформировать команду и выбрать капитана.

Кто ваши помощники. В первую очередь — ваши учителя физики. Решать за вас задачи они не будут, но посоветовать или покритиковать ваши решения могут. В организационном плане их помощь совершенно необходима — собрать вас, вовремя отправить домой, кого-то подбодрить или утешить, а кого-то предостеречь, что-то вам дать из оборудования и научить с ним работать и т. д.

Помочь могут родители. От них вы можете ждать нетрадиционных подходов, помощи в том, что сейчас не может дать вам школа. Это в большой степени относится и к вашим родственникам и друзьям.

Помочь могут студенты — выпускники вашей школы. Разумное взаимодействие с ними принесет вам много пользы. Однако поиски помощников и упование на них не должны подменять вашу самостоятельную и активную работу над решениями задач. Если вам удалось «найти» решение задачи, не решая ее, то цена такому «подвигу» не высока.

Наконец, книга — ваш главный помощник. Многие проблемы, затронутые в задачах ТЮФ, в какой-то степени, возможно, уже решены. Творчески используйте уже полученные результаты (при этом не забудьте дать ссылку на источник). Книга может многое подсказать и многому научить.

Желаем вам удачи и творческих успехов.

Т. П. Корнеева, Е. Н. Юносов,
И. В. Яминский

Ответы, указания, решения

Преобразования плоскости в задачах на построение

1. Вершина B треугольника ABC переходит в вершину C при преобразовании $S_l \circ H_A^k$, где l — биссектриса угла A , $k = AC/BC$.
2. Рассматриваемый отрезок симметричен относительно перпендикуляра к данной прямой, проведенного через центр окружности.
3. Фигуры M_1 и M_2 — дуги, из точек которых отрезок между маяками виден под данными углами, преобразование F — параллельный перенос на вектор, изображающий перемещение корабля между моментами измерения.
4. Постройте отрезок AA_1 и найдите геометрические места точек B и C ; воспользуйтесь тем, что они симметричны друг другу относительно A_2 .
5. Вершина ромба переходит в соседнюю вершину при композиции поворота на 90° вокруг его центра O и инверсии с центром O и коэффициентом $S/2$, где S — площадь ромба.

Избранные школьные задачи

1. $-3, -1, 7$. Указание. Если $x \leq -6$ или $x > 7$, то $2 < \frac{7x+1}{3x+4} < 3$.
2. $2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2 = (2^5 + 5^6 + 2^3 \cdot 5^3)(2^5 + 5^6 - 2^3 \cdot 5^3)$.
3. Пусть AD — наибольшая диагональ (рис. 1). Тогда годятся диагонали AD , AC и BD , так как $AC + BD > AO + DO > AD$.
4. Положим $\alpha = 18^\circ$. Легко видеть, что $a_2 = \frac{a_1}{\cos 2\alpha}$, $a_3 = \frac{a_1}{\cos \alpha} - a_1 \operatorname{tg} \alpha$.
Заметьте, что $\cos 4\alpha = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \sin \alpha$, производим выкладку:
$$a_1^2 + a_3^2 = a_1^2 + \frac{a_1^2(1 - \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = a_1^2 \frac{2 - 2 \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2a_1^2}{1 + \sin \alpha} = \frac{2a_1^2}{1 + \cos 4\alpha} = \frac{2a_1^2}{2 \cos^2 2\alpha} = a_2^2$$
5. Не может. Доказательство. Пусть $ABCD$ — трапеция, удовлетворяющая условиям задачи (рис. 2), и пусть $CE \parallel AB$. Тогда у треугольника CED основание ED имеет длину $15 - 3 = 12$, высота (опущенная на основание) — длину 8. Сумма $CE + CD$ будет наименьшей, если $CE = CD$ (потому что $CE + CD = CE + CD'$), а в

этом последнем случае $CE = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Таким образом, $AB + CD = CE + CD \geq 20 > 18 = AD + BC$, что противоречит возможности вписать в трапецию $ABCD$ окружность.

6. Указание: положите $x = k$, $y = 1 - k$ и найдите z .
7. Если $n \geq 4$ или $n = 1$, то решений нет; если $n = 3$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; если $n = 2$, то $x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$.

Решение. Сложим наши уравнения:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6.$$

Но $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$, причем $x + \frac{1}{x} = 2$ только при $x = 1$. Значит, $n \leq 3$, и если $n = 3$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Случай $n = 2$ и 1 труда не представляют.

8. Указание. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC , AHB , AHC и BHC , имеют одни и тот же радиус R . Выразите AH , A_1H , B_1H , C_1H через R и синусы углов α , β , γ (рис. 3) и подставьте эти выражения в правую часть доказываемого равенства.

9. Построение. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно данной прямой. Проведем окружности с центрами A и A' , касающиеся данной прямой, и к каждой из этих окружностей проведем касательные из точки B . Точки пересечения этих касательных с данной прямой обозначим через M_1, M_2, M_3, M_4 . Условия задачи могут удовлетворять только точки M_1, M_2, M_3, M_4 (докажите!) и каждая из них удовлетворяет или не удовлетворяет им в зависимости от расположения точек C и D . Если, например, точки A и B расположены, как показано на рисунке 4, то $\angle BM_1X = 2\angle AM_1Y$, $\angle BM_2Y = 2\angle AM_2Y$, $\angle BM_3Y = 2\angle AM_3X$ и $\angle BM_4X = 2\angle AM_4X$. Так, скажем, если точка C лежит между M_2 и M_3 , а точка D лежит между M_3 и M_4 , то решений три: M_2, M_3, M_4 ; если же точка C лежит правее M_4 , а точка D — между M_1 и M_2 , то решений нет вовсе.

Замечание. Точка B может попасть внутрь одного из построенных кругов; тогда из нее нельзя провести касательную к соответствующей окружности. Если точка B попадет на окружность, то к этой окружности проводится одна касательная. Кроме того, проведенная касательная может быть параллельна прямой CD . Разберите эти случаи самостоятельно.

10. $(1/\sqrt{2})^n$. Решение. Из условия $\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n = \cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_n$. Поэтому $2^n (\sin \alpha_1)^2 \dots (\sin \alpha_n)^2 = \sin 2\alpha_1 \dots \sin 2\alpha_n \leq 1$ и $\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n \leq (1/\sqrt{2})^n$. Равенство достигается при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \pi/4$.

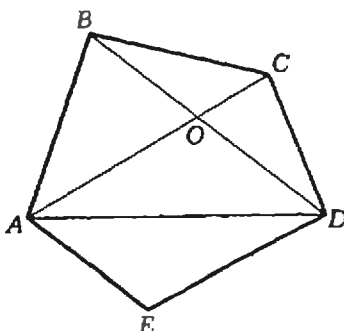


Рис. 1.

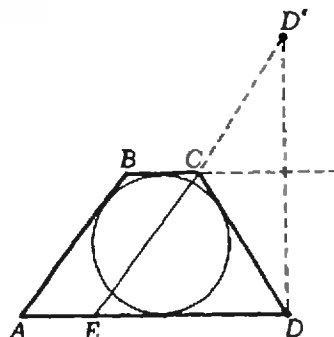


Рис. 2.

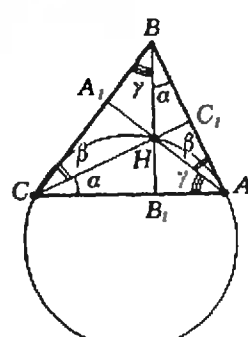


Рис. 3.

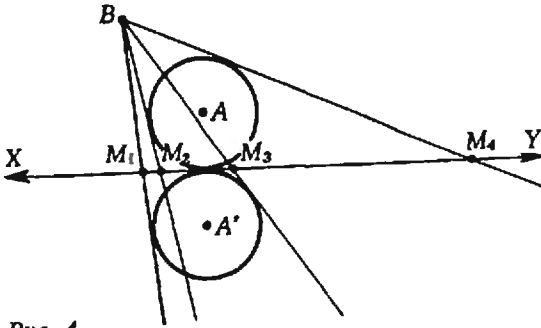


Рис. 4.

11. Если n нечетно, то $x_1 = \dots = x_n = 1$. Если n четно, то $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$, $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$ и либо $x_1 = 1$, либо $x_2 = 1$. Доказательство. Пусть n нечетно. Если $x_1 = 1$, то $x_3 = 1$, $x_5 = 1, \dots, x_n = 1$, $x_2 = 1, x_4 = 1, \dots, x_{n-1} = 1$. Если $x_1 > 1$, то все x_i больше 1, и $x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{n-2} > x_{n-3} > \dots > x_1$; случай $x_1 < 1$ аналогичен. Пусть n четно. Если $x_1 = 1$, то $x_3 = x_5 = \dots = 1$ и $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$. Если $x_2 = 1$, то $x_4 = x_6 = \dots = 1$ и $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$. Предположим, что $x_1 \neq 1$ и $x_2 \neq 1$. Если, скажем, $x_1 < 1$, то $x_3 < 1, x_5 < 1, \dots$ и $x_1 x_3 x_5 \dots < 1$, что противоречит вытекающему из уравнений равенству $x_1^{x_2} x_2^{x_3} \dots = x_2$.

12. Наибольшую площадь имеет прямоугольник, вершина E которого, противоположная A , лежит на границе нашей четверти круга и среди точек этой границы наиболее удалена от диагонали BD . Именно, если $r \geq 2(\sqrt{2}-1)a$, то в качестве E можно взять точку пересечения границы с диагональю AC ; прямоугольник будет в этом случае квадратом со стороной $a - r\sqrt{2}/2$. Если же $r \leq 2(\sqrt{2}-1)a$, то в качестве E можно взять точку пересечения границы четверти круга со стороной BC или со стороной CD ; прямоугольник в этом случае будет иметь стороны длиной a и $a - r$. (Таким образом, в случае $r = 2(\sqrt{2}-1)a$ задача имеет три решения.)

Указание. Выведите формулу

$$2S = (x + y - a)^2 + a^2 - r^2,$$

где S — площадь прямоугольника, x, y — длины его сторон. Проведите через точку E (лежащую на границе нашей четверти круга) прямую, параллельную диагонали BD квадрата, пересекающую прямую AB в точке K . Тогда $BK = |x + y - a|$, так что площадь S искомого прямоугольника имеет наибольшее значение тогда и только тогда, когда расстояние BK является наибольшим. Вычислите S для случаев, когда точка E есть точка пересечения границы четверти круга со стороной квадрата и с диагональю AC квадрата. Сравните результаты вычислений.

13. Нет, не любой. Рассмотрим трехгранный угол с плоскими углами $100^\circ, 100^\circ, 50^\circ$. Предположим, что сечением его некоторой плоскостью служит правильный треугольник ABC (рис. 5). Так как углы AOB и BOC тупые, AB и BC — это наибольшие стороны в треугольниках OAB и OBC соответственно. В таком случае сторона AC наибольшая в треугольнике AOC . Но это не так, ибо угол AOC меньше 60° .

14. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Указание. Постройте на лучах равные отрезки OA, OB, OC, OD . Тогда $ABCD$ — правильный тетраэдр, а точка O —

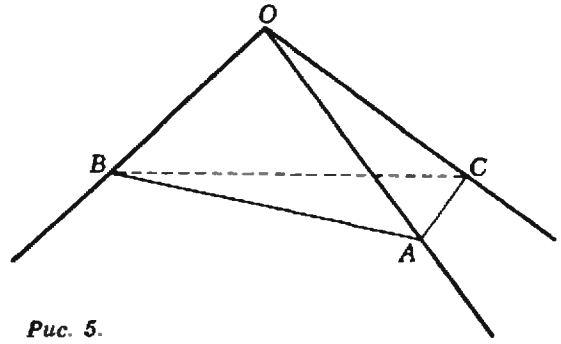


Рис. 5.

его центр тяжести (делит высоту тетраэдра в отношении 3:1).

15. 21. Решение. Из условия следует, что $\frac{n^2}{(1,1)^n} \geq \frac{(n-1)^2}{(1,1)^{n-1}}$ и $\frac{n^2}{(1,1)^n} \geq \frac{(n+1)^2}{(1,1)^{n+1}}$. Значит,

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^2 \geq 1,1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1,1-1}} + 1 \geq n \geq \frac{1}{\sqrt{1,1-1}}.$$

Так как $1,048 < \sqrt{1,1} < 1,05$, то

$$21,9 > \frac{1}{0,048} + 1 > n > 20.$$

Работа, энергия, тепло

1. $A' = (3/11)(4RT - 3Q) \approx 3,9$ кДж.

2. $A = pV = \frac{m}{M}RT = \frac{Q}{rM}RT$.

3. $N = Q_t - \frac{m}{\tau}(c(t - t_0) + \lambda) = 426$ Вт.

Сколько стоит дыня?

Пусть x — налог на одну дыню, y — цена дыни. Тогда

$$\begin{cases} (104 - 19)x = 19y - 1, \\ (17 - 3)x = 3y + 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2, y = 9$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 7)

Редакция уверена, что читатель успешно справился с заданиями «Калейдоскопа». Однако если сам читатель в этом не уверен, мы советуем ему обратиться к книге Я. И. Перельмана «Занимательная физика».

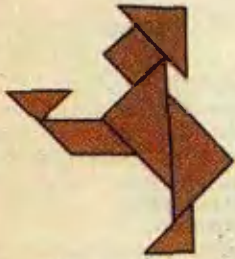
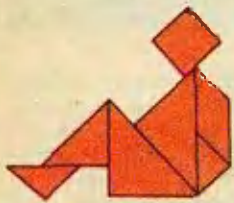
Задачи на разрезание
(см. «Квант» № 7)

Решения всех задач — на рисунке справа.

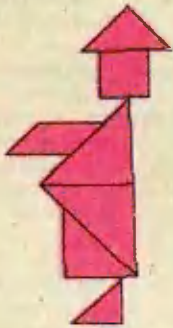
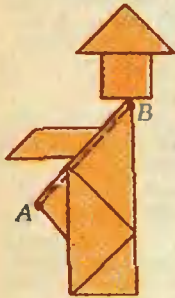
«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Дяде Алеше 34 года, мне 17 лет.
2. Открытые двери в салоне электрички сами закрываются, скатываясь по направляющим под действием силы тяжести.
3. Заметим, что $100000 = 10^5 < 198 \cdot 7 < 30^5 = 24300000$. Кроме того, заметим, что всякое целое число в пятой степени оканчивается

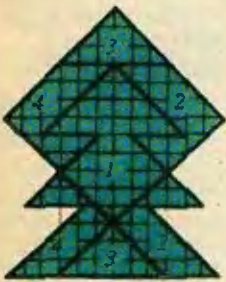
Задачи на разрезание



Танграм



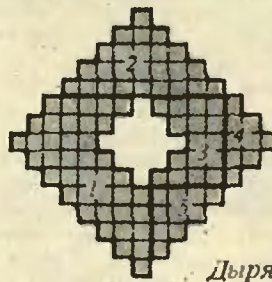
Откуда взялась нога



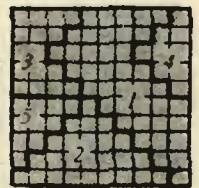
Елочка



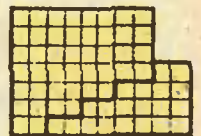
Из двух – один



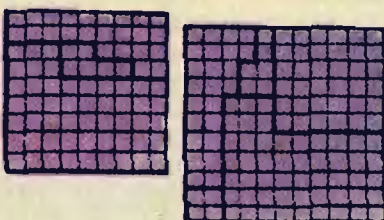
Дырявый зубчатый квадрат



Лесенка



Ступеньки



Из трех – один



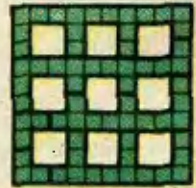
Мальтийский крест



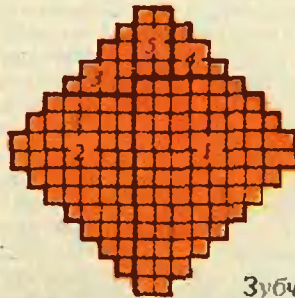
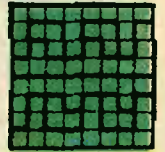
Две фигуры



Квадрирование фигуры



Продырявленный квадрат



Зубчатый квадрат



на ту же цифру, что и само число. Поэтому, казалось бы, нужно проверить лишь два числа: 17 и 27. Однако уже 26^6 — восьмизначное число. Так что на доске было написано $17^5 = 1419857$. На самом деле можно было стереть шесть цифр, оставив *****7. А Антон оставил 1987 — ведь карнавал был новогодний!

4. Пусть мы начали шнуровать с правой верхней дырочки. Затем мы можем пропустить шнурок в любую из дырочек, кроме второй верхней дырочки, т. е. 8 разными способами. Следующим шагом продеваем шнурок в дырочку напротив, и снова у нас выбор, теперь уже из 6 возможностей, потом, после еще двух пропусков шнурка, у нас останется 4 возможности, потом 2, и наконец, пропускаем шнурок в левую верхнюю дырочку. Всего $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$ способа.

5. Сначала нетрудно убедиться, что написано не более одного верного утверждения. Если бы их было больше, то любые два из них противоречили бы друг другу и, следовательно, не могли быть одновременно верными. Все утверждения не могут быть неверными, так как в таком случае последнее утверждение было бы верным, что противоречит нашему предположению. Итак, верно лишь одно утверждение, а именно 99-е, которое утверждает, что неверно 99 утверждений, а верно одно — оно само.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

Задание 9 (Гилл — Орбах, 1925 г.).
1. Lg1! Ф:g1 2. Kg5+ Ф:g5 (2...Kpg7 3. Фe7+ Lf7 4. Ф:f7+ Kph6 5. Фh7×)
3. hg с простым выигрышем.

Задание 10 (В. Алайков, 1986 г.). Ход 1. Lf3, перекрывающий слону g4 доступ к полю e2, опровергается путем 1...Л:с4!, а на 1. Cf3 с той же угрозой 2. Ke2× следует 1...С:с3! Правильно 1. b7! Теперь грозит 2. b8K! и 3. K:c6×. После 1...Cb4 уже решает 2. Lf3! (2. b8K Лa6) и 2...Л:с4 невозможно, так как слон перегородил дорогу ладье. На 1...Лb4 решает 2. Cf3! и защита 2...С:с3 пропала из-за ладьи, перекрывшей дорогу слону. Изящная трактовка известной в композиции геометрической темы Гримшоу. Редкий случай, когда перекрытия в задаче осуществляются и белыми, и черными фигурами.



Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровинки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гиеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. И. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можжаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соколов,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Сдано в набор 17.06.87. Подписано к печати 24.07.87.
Т-12188. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,38
Тираж 200 048 экз. Цена 40 коп. Заказ 1633

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Номер подготовили:

А. И. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова,
Т. С. Петрова, А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. А. Ващенко, М. В. Дубак, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
А. М. Пономарева, П. И. Чернуцкий, В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

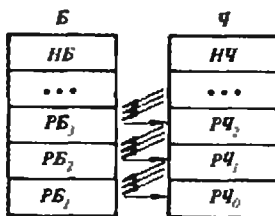
Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гнк.

РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

На «шахматной страничке» уже не раз сообщалось о достижениях компьютеров в анализе шахматных окончаний. Как же компьютер это делает? В основе алгоритма лежит *ретроспективный анализ позиций*, на котором мы сейчас и остановимся.

Будем рассматривать окончания, в которых белые стремятся к победе, а черные — к ничьей. Предполагается, что уже известны оценки всех «младших эндшпилей», возникающих из исследуемых при изменении материала (взятии фигуры или превращении пешки). Введем важное определение. Рангом выигрышной для белых позиции назовем наименьшее число ходов, за которое белые могут поставить мат или перейти в выигрышный младший эндшпиль, независимо от того, как играют черные.

Схема ранжирования приведена на следующем рисунке.



Прежде всего позиции исследуемого плана разбиваются на два множества: Б — с ходом белых и Ч — с ходом черных. Позиции из Ч, в которых король черных заматован или они вынуждены перейти в проигранный младший эндшпиль, отнесем к нулевому рангу. Множество этих, уже ранжированных позиций обозначим через РЧ₀. Удалим его из Ч. Оставшиеся позиции образуют множество НЧ — неранжированные черные.

Выделим в Б все позиции, в которых у белых есть хотя один ход, ведущий в РЧ₀. Это позиции ранга 1 (выигрыш белых в 1 ход), множество их — РБ₁. Удалим его из Б, остав-

шиеся позиции — НБ, неранжированные белые.

Выделим в НЧ все позиции, в которых любой ход ведет в РБ₁. Это также позиции ранга 1 (ход черных, но как бы они ни сыграли, белые выигрывают в 1 ход), их множество — РЧ₁. Удалим его из НЧ. Первый шаг алгоритма закончен, и все готово для следующего, на котором возникают классы позиций РЧ₂, РБ₂ и новые (меньшие) НЧ, НБ.

Процесс ранжирования заканчивается, когда очередное построенное множество РБ_k или РЧ_k оказывается пустым. Позиции, оставшиеся в НБ и НЧ, не имеют ранга, в них белые не в состоянии выиграть, они либо ничейны, либо даже верх берут черные.

Описанный алгоритм анализа в самом деле ретроспективный — для оценки позиций мы идем не «вперед», как обычно, а «назад». Полный перебор вариантов при этом не производится, а рассматриваются лишь важнейшие ветви дерева игры, т. е., если некоторая позиция охвачена перебором, то алгоритм предлагает в ней только такие ходы белых, которые приближают к цели.

Любопытно, что впервые ретроспективный анализ был применен доктором физико-математических наук А. Брудно и кандидатом физико-математических наук И. Ландау для решения шахматной головоломки, о которой у нас уже не раз шла речь. Она называется задачей о неприкосновенном короле.

У белых король на с3 и ферзь, у черных — один король. Могут ли белые поставить мат, не делая ходов королем?

Обсудим возможность решить задачу обычным перебором, «вперед». У белых всякий раз выбор примерно на 20 ходов, у черных — из пяти. Вариантов ход-ответ около 100. Всего вариантов просмотра на глубину 20 ходов порядка $100^{20} = 10^{40}$. Если машина будет просматривать даже миллиард (10^9) позиций в секунду, то анализ займет миллиарды миллиардов лет. Мы специально привели эти вычисления, чтобы показать, насколько бесполезен полный

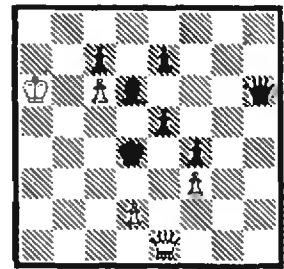
перебор вариантов для анализа даже такой простой позиции.

Теперь покажем, как упрощается дело, если за него взяться с умом. Заметим, что всего положений фигур не так много. Белый король прикован к полю с3, а в распоряжении белого ферзя и черного короля меньше 64 полей. Таким образом, общее число позиций не превосходит 64^2 , т. е. около 4000, с учетом очереди хода — 8000. Сведения о таком числе ситуаций легко поместить в память компьютера. Ранг выигрышной позиции в данном случае — это наименьшее число ходов, за которое белый ферзь ставит мат, в частности, матовые позиции образуют множество РЧ₀.

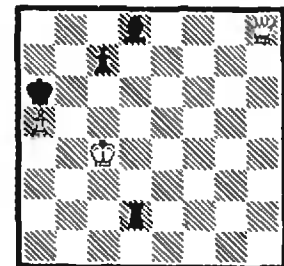
Задача решалась на ЭВМ для всевозможных положений неприкосновенного короля, и выяснилось, что решение существует только при короле на с3 или на симметричных ему полях с6, f3 и f6. При этом максимальный ранг равен 23 — мат дается не позднее 23-го хода при любом начальном положении белого ферзя и черного короля.

Осталось сказать, что идея ретроспективного анализа используется при решении различных переборных задач, но ее шахматная иллюстрация, пожалуй, наиболее наглядна.

Конкурсные задания



15. Белые начинают и выигрывают.



16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

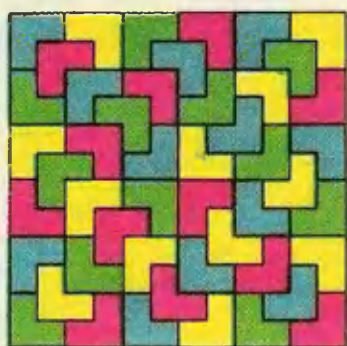


Рис. 1.

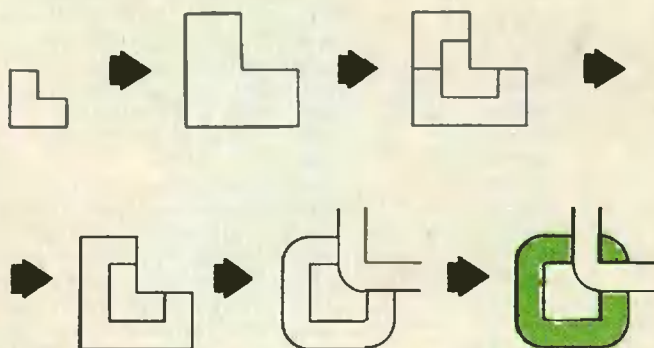


Рис. 2.

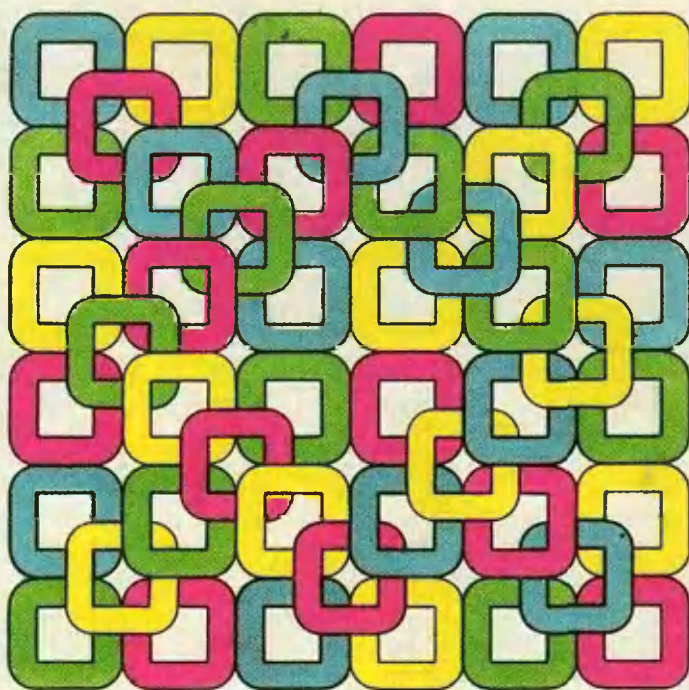


Рис. 3.

В решении задачи M1038, опубликованном в этом номере журнала, говорится, что любой прямоугольник $6k \times 2n$, где $k \geq 1$, а $n \geq 3$, можно разбить на «уголки» из трех клеток так, что «уголки» не составят ни одного прямоугольника меньшего размера.

В решении утверждается, что при этом обязательно существуют и центрально-симметричные разбиения — одно из них показано на рисун-

ке 1. Это разбиение квадрата 12×12 интересно еще и тем, что при поворотах на 90° циклически меняются цвета «уголков»: зеленый цвет переходит в красный, красный — в желтый, желтый — в синий, синий — в красный.

На рисунке 2 показана эволюция «уголка», после которой рисунок 1 превращается в мозаику колец, изображенную на рисунке 3.

М.Х.